TS1 et TS3 spécialité

Contrôle du jeudi 28 septembre 2017 (60 minutes)

Écrire très lisiblement, sans rature et sans utiliser d'abréviations. **Note : …. / 20**

Prénom : ………………………………… **Nom : ……………………………………………………**

I. (7 points)

Partie 1 (4 points : 1°) 3 points ; 2°) 1 point)

Le but de cette partie est de déterminer tous les entiers relatifs n vérifiant la condition (E) : « $2n+1$ divise $n+17$ ». Pour cela, on effectue un raisonnement en deux parties.

1°) Soit n un entier relatif vérifiant la condition (E).
Démontrer que $2n+1$ divise un entier naturel fixe (indépendant de n) que l'on déterminera.
En déduire les valeurs possibles de n.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

2°) Vérifier que les valeurs trouvées conviennent.

………

………

………

………

………

Conclure clairement :

Les entiers relatifs n vérifiant la condition (E) sont ……………………………………………………………… .

Partie 2 (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Le but de cette partie est de déterminer tous les entiers relatifs n vérifiant la condition (F) : « $2n+1$ divise $2n^3+5n^2+n+16$ ».

1°) Recopier l'égalité suivante en remplaçant les pointillés dans la parenthèse par une expression en fonction de n :
$2n^3+5n^2+n+16=(2n+1)\times(\ldots\ldots\ldots)+n+17$.

………………………………………………………………………………

2°) Déterminer les entiers relatifs n vérifiant la condition (F). Utiliser un raisonnement par équivalences.
Faire une phrase de conclusion claire sur le même modèle que dans la question 2°) de la partie 1.

………

………

………

………

………

………

II. (2 points)

Soit x et y deux entiers relatifs premiers entre eux. On suppose que x est pair.
Que peut-on dire de la parité de y ? Justifier.

……

……

……

……

III. (1 point)

Compléter la propriété suivante concernant deux entiers relatifs a et b.

Si a divise b et b divise a, alors …………………………………………………………………………………

IV. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{N}$ qui, à tout entier naturel, associe le produit de ses chiffres en base 10.

Exemples : $f(234) = 2\times3\times4 = 24$; $f(7211) = 7\times2\times1\times1 = 14$; $f(5) = 5$

Aucune justification n'est demandée dans cet exercice.

1°) Déterminer le plus petit antécédent de 100 par f. Répondre par une phrase.

……

2°) Combien y a-t-il d'antécédents de 0 par f strictement inférieurs à 100 ? Répondre par une phrase.

……

3°) Déterminer un entier naturel n tel que $f(n) \neq 0$ et $f\left[f(n)\right] = 0$.

……………………………… (une seule réponse, sans égalité et sans justifier)

4°) Déterminer un entier naturel n tel que $f\left(n^2\right) = 2$.

……………………………… (une seule réponse, sans égalité et sans justifier)

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit n un entier relatif quelconque. On pose $a = 2n^2 + 1$, $b = n^3 + n$, $c = n^3 - n$.

Les deux questions sont indépendantes.

1°) Calculer $a^2 - 4nb$. Que peut-on en déduire pour a et b ? Justifier rigoureusement.

……

……

……

……

……

……

2°) On considère un entier relatif k qui divise a et c.
En utilisant la combinaison linéaire $\left(3 - 2n^2\right)a + 4nc$, démontrer que k divise un entier relatif fixe indépendant de n.
En déduire les valeurs possibles de k.

……

……

……

……

……

……

……

……

Conseils donnés à l'oral

Le seul endroit où l'on utilisera le symbole d'équivalence est la question 2°) de la partie 2 de l'exercice **I**.
En dehors de cette question, le symbole d'équivalence est interdit.

Pour l'exercice I, partie 1, question 2°), on peut vérifier pour seulement quelques valeurs de n et écrire que l'on a fait la vérification au brouillon pour les autres valeurs.

Attention à la présentation des calculs, notamment dans l'exercice **V**.

On présentera ainsi les calculs :

$$a^2 - 4nb = \text{..................}$$

$$= \text{..................}$$

$$= \text{..................}$$

Corrigé du contrôle du 28-9-2017

I.

Partie 1

Le but de cette partie est de déterminer tous les entiers relatifs n vérifiant la condition (E) : « $2n+1$ divise $n+17$ ». Pour cela, on effectue un raisonnement en deux parties.

1°) Soit n un entier relatif vérifiant la condition (E).
Démontrer que $2n+1$ divise un entier naturel fixe (indépendant de n) que l'on déterminera.
En déduire les valeurs possibles de n.

n vérifie la condition (E) donc $2n+1 \mid n+17$.

De plus, $2n+1 \mid 2n+1$ de manière évidente.

Donc $2n+1$ divise toute combinaison linéaire de $2n+1$ et de $n+17$ à coefficients entiers relatifs.

Considérons la combinaison linéaire $\mathrm{C}=2(n+17)-(2n+1)$ dont les coefficients 2 et – 1 sont des entiers relatifs.

$\mathrm{C}=33$

Comme $2n+1$ divise C, $2n+1$ divise 33.

Les diviseurs de 33 sont 1, 3, 11, 33, – 1, – 3, – 11, – 33.

Les valeurs possibles de n sont 0, 1, 5, 16, – 1, – 2, – 6, – 17.

2°) Vérifier que les valeurs trouvées conviennent.

Pour $n=-17$, $2n+1=-33$ et $n+17=0$. On a bien – 33 | 0.

Pour $n=-6$, $2n+1=-11$ et $n+17=11$. On a bien – 11 | 11.

Et ainsi de suite pour les autres valeurs de n.

Conclure clairement :

Les entiers relatifs n vérifiant la condition (E) sont 0, 1, 5, 16, – 1, – 2, – 6, – 17.

Partie 2

Le but de cette partie est de déterminer tous les entiers relatifs n vérifiant la condition (F) : « $2n+1$ divise $2n^3+5n^2+n+16$ ».

1°) Recopier l'égalité suivante en remplaçant les pointillés dans la parenthèse par une expression en fonction de n :
$2n^3+5n^2+n+16=(2n+1)\times(.........)+n+17$.

$$2n^3+5n^2+n+16=(2n+1)\times\left(n^2+2n-1\right)+n+17$$

2°) Déterminer les entiers relatifs n vérifiant la condition (F). Utiliser un raisonnement par équivalences.
Faire une phrase de conclusion claire sur le même modèle que dans la question 2°) de la partie 1.

L'égalité du 1°) ne fait intervenir que des entiers relatifs donc d'après le lemme « $a=bc+d$ »,

$(\mathrm{F}) \Leftrightarrow 2n+1 \mid n+17$

$\Leftrightarrow (\mathrm{E})$

Les entiers relatifs n vérifiant la condition (F) sont 0, 1, 5, 16, – 1, – 2, – 6, – 17.

II.

Soit x et y deux entiers relatifs premiers entre eux. On suppose que x est pair.
Que peut-on dire de la parité de y ? Justifier.

On effectue un raisonnement par l'absurde.

Si y était pair, alors x et y seraient tous les deux divisibles par 2 et ne seraient donc pas premiers entre eux.

Donc y est impair.

On peut retenir que deux entiers pairs ne sont jamais premiers entre eux.

III.

Compléter la propriété suivante concernant deux entiers relatifs a et b.

Si a divise b et b divise a, alors $a=b$ ou $a=-b$.

On peut aussi écrire la condition sous la forme $|a|=|b|$.

IV.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{N}$ qui, à tout entier naturel, associe le produit de ses chiffres en base 10.

Exemples : $f(234)=2\times3\times4=24$; $f(7211)=7\times2\times1\times1=14$; $f(5)=5$
Aucune justification n'est demandée dans cet exercice.

$f(n) =$ produit des chiffres de l'écriture de n en base 10

Il n'y a pas moyen d'écrire autrement $f(n)$.

Pour utiliser le symbole Π, il faut poser $n = \overline{a_p a_{p-1} ... a_1 a_0}$ où a_0, a_1 … a_p sont les chiffres de l'écriture en base 10 de n. On a alors $f(n) = a_p \times a_{p-1} \times ... \times a_1 \times a_0$ ce que l'on peut aussi écrire $f(n) = \prod_{k=0}^{k=p} a_k$.

Il faut noter que dans le cas d'un entier naturel qui s'écrit avec un seul chiffre en base 10, il ne s'agit pas vraiment d'un produit.

Il n'existe pas de formule explicite pour $f(n)$ en fonction de n.

1°) Déterminer le plus petit antécédent de 100 par *f*.
Répondre par une phrase.

Le plus petit antécédent de 100 par *f* est 455.

On remarque tout d'abord que les entiers naturels qui s'écrivent en base 10 avec un ou deux chiffres ne peuvent convenir.

On cherche donc un entier naturel qui s'écrit avec trois chiffres en base 10.

On a : $100 = 4 \times 5 \times 5$ (seule manière d'écrire 100 comme produit de 3 chiffres).

Il y a donc 2 antécédents de 100 qui s'écrivent avec trois chiffres : 455 et 545.

Le plus petit est donc 455.

2°) Combien y a-t-il d'antécédents de 0 par *f* strictement inférieurs à 100 ?
Répondre par une phrase.

Il y a 10 antécédents de 0 par *f* strictement inférieurs à 100.

On prend en compte 0 car $f(0) = 0$.

3°) Déterminer un entier naturel n tel que $f(n) \neq 0$ et $f\left[f(n)\right] = 0$.

52 (une seule réponse, sans égalité et sans justifier)

On peut aussi prendre 25.

4°) Déterminer un entier naturel n tel que $f\left(n^2\right) = 2$.

11 (une seule réponse, sans égalité et sans justifier)

On écrit la liste des premiers antécédents de 2 par *f* : 2, 12, 21, 112, 121, 211 …
121 est un carré parfait.

V.

Soit n un entier relatif quelconque. On pose $a = 2n^2 + 1$, $b = n^3 + n$, $c = n^3 - n$.

Les deux questions sont indépendantes.

1°) Calculer $a^2 - 4nb$. Que peut-on en déduire pour a et b ? Justifier rigoureusement.

$$a^2 - 4nb = \left(2n^2 + 1\right)^2 - 4n\left(n^3 + n\right)$$

$$= 4n^4 + 4n^2 + 1 - 4n^4 - 4n^2$$

$$= 1$$

$a^2 - 4nb = a \times a - 4n \times b$ est une combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs (a et $-4n$) égale à 1.
D'après le cours, a et b sont premiers entre eux.

2°) On considère un entier relatif k qui divise a et c.
En utilisant la combinaison linéaire $\left(3 - 2n^2\right)a + 4nc$, démontrer que k divise un entier relatif fixe indépendant de n.
En déduire les valeurs possibles de k.

$$\left(3 - 2n^2\right)a + 4nc = \left(3 - 2n^2\right)\left(2n^2 + 1\right) + 4n\left(n^3 - n\right)$$

$$= 3 - 4n^4 + 4n^2 + 4n^4 - 4n^2$$

$$= 3$$

$\left(3 - 2n^2\right)a + 4nc$ est une combinaison linéaire de a et c à coefficients entiers relatifs ($3 - 2n^2$ et $4n$).

k est un diviseur commun à a et c donc k divise 3.

Les valeurs possibles de k sont -3, -1, 1 et 3.