TS2 spécialité

Contrôle du mercredi 27 septembre 2017 (50 minutes)

Écrire très lisiblement, sans rature et sans utiliser d'abréviations.

Note : …. / 20

Prénom : ………………………………… Nom : ……………………………………………………

I. (4 points)

Déterminer tous les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels tels que $x^2 - xy = 14 \quad (1)$.

Répondre en écrivant les couples séparés par une virgule sans faire de phrase et détailler la recherche sur les lignes en utilisant du début à la fin une chaîne d'équivalences.

…………………………………………………………………

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

II. (2 points)

On pose $\text{A} = 12n^2 + 12n + 1$ où n désigne un entier naturel.
Déterminer trois valeurs non nulles de n telles que A soit un carré parfait.
Répondre en écrivant les valeurs séparées par une virgule sans faire de phrase.

…………………………………………………………………

III. (1 point)

Compléter l'énoncé du lemme d'Euclide.

Soit a, b, c, d quatre entiers relatifs tels que $a = bc + d$.

L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs communs à ………………………… .

IV. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Pour tout entier relatif n, on pose $\text{A} = \left(n^2 + n + 3\right)^2$.

1°) Écrire ci-dessous l'expression développée, réduite et ordonnée de A. On écrira une égalité du type $\text{A} = \ldots\ldots\ldots$.

……

2°) Le but de cette question est de déterminer les entiers relatifs n vérifiant la condition suivante :

(C) : « n divise A ».

Écrire sur la ligne ci-dessous une égalité de la forme : $\text{A} = n \times (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) + 9$.

……

En utilisant un résultat du cours, compléter l'équivalence suivante :

$(\text{C}) \Leftrightarrow n \mid \ldots\ldots\ldots$

$\Leftrightarrow$ ………………………………………………………………………………………………

On complètera la deuxième ligne par des égalités du type $n = \ldots\ldots\ldots$.

Conclure clairement :

Les entiers relatifs n vérifiant la condition (C) sont …………………………………………………………… .

V. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{N}$ qui, à tout entier naturel, associe le produit de ses chiffres en base 10.

Exemples : $f(234)=2\times3\times4=24$; $f(7211)=7\times2\times1\times1=14$; $f(5)=5$

1°) Déterminer tous les antécédents de 14 par f inférieurs ou égaux à 1000.
Répondre en écrivant les valeurs séparées par une virgule sans faire de phrase.

………

2°) Déterminer les antécédents de 1 par f.
Faire une phrase correctement rédigée.

………

………

3°) Quels sont les deux plus petits entiers naturels n qui s'écrivent avec trois chiffres en base 10 tels que $f(n)$ divise n ?

……………………………… (une seule réponse, sans égalité et sans justifier)

VI. (5 points)

Dans tout l'exercice, n désigne un entier relatif. On pose $a=2n+1$, $b=2n(n+1)$ et $c=n(n+3)$.
Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1 (1 point)

Calculer $(2n+1)a-2b$; en déduire que a et b sont premiers entre eux.

………

………

………

………

………

………

Partie 2 (1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) On considère un entier relatif k qui divise a et c.
En utilisant la combinaison linéaire $(2n+5)a-4c$, démontrer que k divise un entier relatif fixe indépendant de n.
En déduire les valeurs possibles de k.

………

………

………

………

………

………

………

2°) Les entiers $2\times10^{2017}+1$ et $10^{2017}\times\left(10^{2017}+3\right)$ sont-ils premiers entre eux ? Justifier.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 27-9-2017

Le contrôle a duré beaucoup plus longtemps que prévu.

I.

Déterminer tous les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels tels que $x^2 - xy = 14 \quad (1)$.

Répondre en écrivant les couples séparés par une virgule sans faire de phrase et détailler la recherche sur les lignes en utilisant du début à la fin une chaîne d'équivalences.

$$(14\,;13)\ ;\ (7\,;5)$$

$(1) \Leftrightarrow x(x-y)=14$

Les diviseurs positifs de 14 sont 1, 2, 7, 14.

Il y a 4 $\boxed{\text{couples}}$ de diviseurs positifs associés de 14 : $(1\,;14)$, $(14\,;1)$, $(2\,;7)$, $(7\,;2)$.

$(1) \Leftrightarrow x$ et $x-y$ sont des diviseurs positifs associés de 14

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x-y=14 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=14 \\ x-y=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=2 \\ x-y=7 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=7 \\ x-y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-13 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=14 \\ y=13 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=7 \\ y=5 \end{cases}$$

On a 4 systèmes car il y a 4 $\boxed{\text{couples}}$ de diviseurs positifs associés de 14.

On ne retient que les couples $(14\,;13)$ et $(7\,;5)$ qui sont formés d'entiers naturels.

II.

On pose $A = 12n^2 + 12n + 1$ où n désigne un entier naturel.
Déterminer trois valeurs non nulles de n telles que A soit un carré parfait.
Répondre en écrivant les valeurs séparées par une virgule sans faire de phrase.

1 ; 5 ; 20

1ère méthode :

On cherche « à la main » en tâtonnant.

2e méthode :

On utilise une fonction et la calculatrice (changement de cadre).

On rentre la fonction $f : x \mapsto \sqrt{12x^2 + 12x + 1}$.

On règle la table de valeurs en commençant à 0 avec un pas de 1.

III.

Compléter l'énoncé du lemme d'Euclide.

Soit a, b, c, d quatre entiers relatifs tels que $a = bc + d$.

L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs communs à b et d.

IV.

Pour tout entier relatif n, on pose $A = (n^2 + n + 3)^2$.

1°) Écrire ci-dessous l'expression développée, réduite et ordonnée de A. On écrira une égalité du type A = ...

$$A = n^4 + 2n^3 + 7n^2 + 6n + 9$$

On applique l'identité remarquable $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.

2°) Le but de cette question est de déterminer les entiers relatifs n vérifiant la condition suivante :

(C) : « n divise A ».

Écrire sur la ligne ci-dessous une égalité de la forme : $A = n \times (........................) + 9$.

$$A = n \times (n^3 + 2n^2 + 7n + 6) + 9$$

En utilisant un résultat du cours, compléter l'équivalence suivante :

$(C) \Leftrightarrow n \mid 9$

$\Leftrightarrow n = 1$ ou $n = 3$ ou $n = 9$ ou $n = -1$ ou $n = -3$ ou $n = -9$

On complètera la deuxième ligne par des égalités du type $n = ...$.

Conclure clairement :

Les entiers relatifs n vérifiant la condition (C) sont 1, 3, 9, – 1, – 3, – 9.

V.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{N}$ qui, à tout entier naturel, associe le produit de ses chiffres en base 10.

Exemples : $f(234) = 2 \times 3 \times 4 = 24$; $f(7211) = 7 \times 2 \times 1 \times 1 = 14$; $f(5) = 5$

$f(n) =$ produit des chiffres de l'écriture de n en base 10

Il n'y a pas moyen d'écrire autrement $f(n)$.

Pour utiliser le symbole Π, il faut poser $n = \overline{a_p a_{p-1} ... a_1 a_0}$ où a_0, a_1 … a_p sont les chiffres de l'écriture en base 10 de n. On a alors $f(n) = a_p \times a_{p-1} \times ... \times a_1 \times a_0$ ce que l'on peut aussi écrire $f(n) = \prod_{k=0}^{k=p} a_k$.

Il faut noter que dans le cas d'un entier naturel qui s'écrit avec un seul chiffre en base 10, il ne s'agit pas vraiment d'un produit.

Il n'existe pas de formule explicite pour $f(n)$ en fonction de n.

1°) Déterminer tous les antécédents de 14 par f inférieurs ou égaux à 1000.
Répondre en écrivant les valeurs séparées par une virgule sans faire de phrase.

27 ; 72 ; 127 ; 172 ; 217 ; 271 ; 712 ; 721

2°) Déterminer les antécédents de 1 par f.
Faire une phrase correctement rédigée.

Les antécédents de 1 par f sont les entiers naturels dont l'écriture en base 10 ne comporte que le chiffre 1 c'est-à-dire de la forme $\overline{111...1}$.

3°) Quels sont les deux plus petits entiers naturels n qui s'écrivent avec trois chiffres en base 10 tels que $f(n)$ divise n ?

111 ; 112 (une seule réponse, sans égalité et sans justifier)

VI.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier relatif. On pose $a = 2n+1$, $b = 2n(n+1)$ et $c = n(n+3)$.

Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1

Calculer $(2n+1)a - 2b$; en déduire que a et b sont premiers entre eux.

$$\begin{aligned}(2n+1)a - 2b &= (2n+1)^2 - 2\times 2n(n+1)\\ &= (2n+1)^2 - 4n(n+1)\\ &= 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 4n\\ &= 1\end{aligned}$$

$(2n+1)a - 2b$ est une combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs.
Comme elle est égale à 1, on peut affirmer d'après un lemme du cours que a et b sont premiers entre eux.

Partie 2

1°) On considère un entier relatif k qui divise a et c.
En utilisant la combinaison linéaire $(2n+5)a - 4c$, démontrer que k divise un entier relatif fixe indépendant de n.
En déduire les valeurs possibles de k.

$$\begin{aligned}(2n+5)a - 4c &= (2n+5)(2n+1) - 4n(n+3)\\ &= \cancel{4n^2} + \cancel{12n} + 5 \cancel{-4n^2} \cancel{-12n}\\ &= 5\end{aligned}$$

k divise a et c donc k divise la combinaison linéaire $(2n+5)a - 4c$ (combinaison linéaire de a et de c à coefficients entiers relatifs) qui est égale à 5.

On en déduit que les valeurs possibles de k sont 1, – 1, 5, – 5.

2°) Les entiers $2\times 10^{2017} + 1$ et $10^{2017} \times (10^{2017} + 3)$ sont-ils premiers entre eux ? Justifier.

On remarque que $2\times 10^{2017} + 1$ et $10^{2017} \times (10^{2017} + 3)$ correspondent aux valeurs de a et c pour $n = 10^{2017}$.

Soit k un diviseur commun à $2\times 10^{2017} + 1$ et $10^{2017} \times (10^{2017} + 3)$.
D'après le 1°), les valeurs possibles de k sont 1, – 1, 5, – 5.

Or $2\times 10^{2017} + 1 = \overline{200...01}$ (avec 2015 chiffres égaux à 0).
Il apparaît donc que $2\times 10^{2017} + 1$ n'est pas divisible par 5.

Les seules valeurs possibles de k sont donc 1 et – 1.

Par suite, les entiers $2\times 10^{2017} + 1$ et $10^{2017} \times (10^{2017} + 3)$ sont premiers entre eux.