**TS1**

# Devoir pour le lundi 15 janvier 2018

La totalité du devoir doit tenir sur une copie simple.

---

On dispose de trois boules indiscernables au toucher numérotées 1, 2, 3 placées dans une urne et de deux pièces équilibrées A et B. Un jeu consiste à tirer plusieurs fois une boule dans l'urne en la remettant chaque fois dans l'urne.
Après chaque tirage, si l'on obtient la boule portant le numéro 1, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient la boule portant le numéro 2, alors on retourne la pièce B et si l'on on obtient la boule portant le numéro 3, alors on ne retourne aucune des deux pièces. Au début du jeu, les deux pièces sont du côté face.
Pour tout entier naturel *n*, on note :

- $X_n$ l'événement : « À l'issue de *n* tirages dans l'urne, les deux pièces sont du côté face » ;
- $Y_n$ l'événement : « À l'issue de *n* tirages dans l'urne, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face » ;
- $Z_n$ l'événement : « À l'issue de *n* tirages dans l'urne, les deux pièces sont du côté pile ».

De plus, on note $x_n$, $y_n$, $z_n$ les probabilités respectives des événements $X_n$, $Y_n$ et $Z_n$. Ainsi, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et $z_0 = 0$.

1°) Expliquer par une phrase, sans faire de calculs, pourquoi pour tout entier naturel *n*, on a : $x_n + y_n + z_n = 1 \quad (1)$.

2°) Faire un arbre de probabilités à deux niveaux en faisant figurer pour le premier niveau les événements $X_n$, $Y_n$, $Z_n$ et pour le deuxième niveau les événements $X_{n+1}$, $Y_{n+1}$, $Z_{n+1}$.
Exprimer $x_{n+1}$ en fonction de $x_n$, $y_n$, $z_n$.
Exprimer $y_{n+1}$ en fonction de $x_n$, $y_n$, $z_n$.
Exprimer $z_{n+1}$ en fonction de $x_n$, $y_n$, $z_n$.

Le but des questions suivantes est d'exprimer $x_n$, $y_n$, $z_n$ en fonction de *n*.

3°) a) Démontrer, en utilisant l'égalité $(1)$, que pour tout entier naturel *n*, $y_{n+1} = \dfrac{2 - y_n}{3}$.

b) On pose, pour tout entier naturel *n*, $b_n = y_n - \dfrac{1}{2}$.

Démontrer que la suite $(b_n)$ est géométrique.

Exprimer $y_n$ en fonction de *n*.

4°) On pose $c_n = z_n - x_n$.

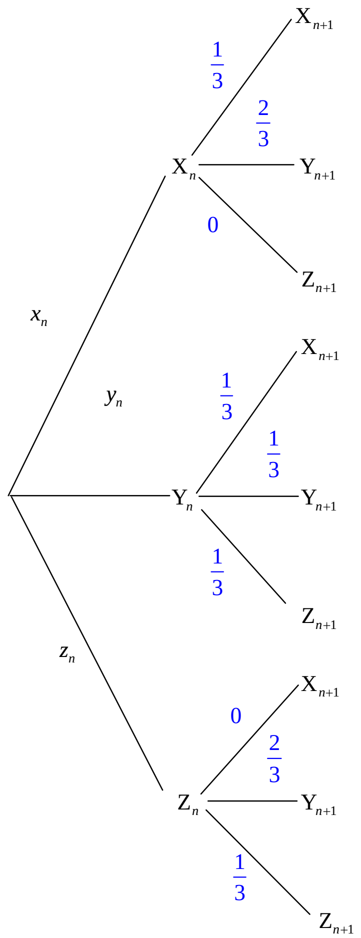
Déterminer la nature de la suite $(c_n)$.

En déduire $x_n$ puis $z_n$ en fonction de *n*.

# Corrigé

1°) $X_n$, $Y_n$, $Z_n$ forment un système complet d'événements donc la somme de leurs probabilités est égale à 1.
Par suite, on a : $x_n + y_n + z_n = 1 \quad (1)$.

2°)




$X_{n+1}$ est l'événement « À l'issue de $n+1$ tirages dans l'urne, les deux pièces sont du côté face ».
On cherche donc la probabilité que, à l'issue de $n+1$ lancers, les deux pièces soient du côté face sachant qu'à l'issue de *n* tirages elles étaient déjà les deux du côté face. Il faut donc qu'il n'y ait aucun retournement de pièce lors du $(n+1)$-ième tirage, c'est-à-dire qu'il faut tirer la boule portant le numéro 3.

La probabilité de l'événement « obtenir la boule portant le numéro 3 » est $\dfrac{1}{3}$ puisqu'il y a trois boules dans l'urne indiscernables au toucher et donc qu'il y a équiprobabilité.

On en déduit que $P(X_{n+1} / X_n) = \dfrac{1}{3}$.

On fait de même dans les autres cas.

$X_n$, $Y_n$, $Z_n$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(X_{n+1}) = P(X_{n+1} \cap X_n) + P(X_{n+1} \cap Y_n) + P(X_{n+1} \cap Z_n)$$
$$P(Y_{n+1}) = P(Y_{n+1} \cap X_n) + P(Y_{n+1} \cap Y_n) + P(Y_{n+1} \cap Z_n)$$
$$P(Z_{n+1}) = P(Z_{n+1} \cap X_n) + P(Z_{n+1} \cap Y_n) + P(Z_{n+1} \cap Z_n)$$

Ces égalités donnent :

$$x_{n+1} = P(X_n) \times P(X_{n+1} / X_n) + P(Y_n) \times P(X_{n+1} / Y_n) + P(Z_n) \times P(X_{n+1} / Z_n)$$

$$y_{n+1} = P(X_n) \times P(Y_{n+1} / X_n) + P(Y_n) \times P(Y_{n+1} / Y_n) + P(Z_n) \times P(Y_{n+1} / Z_n)$$

$$z_{n+1} = P(X_n) \times P(Z_{n+1} / X_n) + P(Y_n) \times P(Z_{n+1} / Y_n) + P(Z_n) \times P(Z_{n+1} / Z_n)$$

En remplaçant les probabilités conditionnelles par leurs valeurs (lue dans l'arbre de probabilités), on obtient immédiatement les égalités suivantes :

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{3} + \frac{y_n}{3}$$
$$y_{n+1} = \frac{2x_n}{3} + \frac{y_n}{3} + \frac{2z_n}{3}$$
$$z_{n+1} = \frac{y_n}{3} + \frac{z_n}{3}$$

On peut aussi écrire ces trois relations sous la forme :

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{3}$$
$$y_{n+1} = \frac{2x_n + y_n + 2z_n}{3}$$
$$z_{n+1} = \frac{y_n + z_n}{3}$$

3°)

a) D'après l'égalité $(1)$, on a : $x_n + z_n = 1 - y_n \quad (1')$.

Or $y_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}z_n$ donc $y_{n+1} = \frac{2}{3}(x_n + z_n) + \frac{1}{3}y_n$.

Compte tenu de $(1')$, cette dernière égalité donne $y_{n+1} = \frac{2}{3}(1 - y_n) + \frac{1}{3}y_n$ soit $y_{n+1} = \frac{2 - y_n}{3}$.

b)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_{n+1} = y_{n+1} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{2 - y_n}{3} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{4 - 2y_n - 3}{6}$$
$$= \frac{1 - 2y_n}{6}$$
$$= \frac{-2\left(y_n - \frac{1}{2}\right)}{6}$$
$$= -\frac{b_n}{3}$$

On en déduit que la suite $(b_n)$ est géométrique de premier terme $b_0 = -\frac{1}{2}$ et de raison $q = -\frac{1}{3}$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

Or par définition de la suite $(b_n)$, $\forall n \in \mathbb{N} \quad y_n = b_n + \frac{1}{2}$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad y_n = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}$ d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad y_n = \frac{1}{2} \times \left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$.

4°) $\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = z_n - x_n$

Déterminons la nature de la suite $(c_n)$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_{n+1} = z_{n+1} - x_{n+1}$$

$$= \frac{1}{3} y_n + \frac{1}{3} x_n - \frac{1}{3} y_n - \frac{1}{3} x_n$$

$$= \frac{1}{3}(z_n - x_n)$$

$$= \frac{1}{3} c_n$$

On en déduit que la suite $(c_n)$ est géométrique de premier terme $c_0 = -1$ et de raison $q' = \frac{1}{3}$.

Déduisons-en $x_n$ puis $z_n$ en fonction de *n*.

On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = z_n - c_n$ et $z_n = 1 - x_n - y_n$.

On obtient l'égalité $x_n = 1 - x_n - y_n - c_n$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2x_n = 1 - y_n - c_n$ d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = \frac{1 - y_n - c_n}{2}$.

Pour terminer, on reprend les expressions explicites de $y_n$ et de $c_n$ en fonction de *n*.

On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = c_n + x_n$$

$$= -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

On vérifie avec les expressions obtenues que $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n + y_n + z_n = 1$.