

La totalité du devoir doit tenir sur une copie simple.

Une entreprise fabrique divers produits à base de chocolat pour lesquels elle se fait livrer des fèves de cacao. Le service contrôle la qualité des fèves de cacao livrées par les producteurs. Un des critères de qualité est le taux d'humidité qui doit être de 7 %. On dit alors que la fève est conforme. L'entreprise a trois fournisseurs différents.

Le premier fournisseur procure la moitié du stock de fèves, le deuxième apporte 30 % et le dernier apporte 20 %. Pour le premier, 98 % de sa production respecte le taux d'humidité ; pour le deuxième, qui est un peu moins cher, 90 % de sa production est conforme, et le troisième fournit 20 % de fèves non conformes.

1°) On choisit au hasard une fève dans le stock reçu.

Pour $i \in \{1; 2; 3\}$, déterminer la probabilité qu'elle provienne du fournisseur i , sachant qu'elle est conforme.

On donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles.

2°) Le troisième fournisseur ayant la plus forte proportion des fèves non conformes, l'entreprise décide de ne conserver que les fournisseurs 1 et 2. De plus, elle souhaite que 92 % des fèves qu'elle achète soient conformes. Le fournisseur 1 fournit alors une proportion p de fèves et l'entreprise 2 fournit le reste.

Déterminer la valeur de p pour que l'objectif soit atteint.

On donnera le résultat sous forme décimale.

3°) L'entreprise lance un nouveau produit à base de chocolat. Une enquête de satisfaction effectuée la première année a révélé que 85 % des clients étaient satisfaits du produit.

L'entreprise souhaite vérifier si le niveau de satisfaction reste le même la deuxième année. Pour cela, elle décide d'interroger un échantillon de 900 clients afin de conclure sur l'hypothèse d'un niveau de satisfaction maintenu.

a) Dans le cas où il y aurait exactement 85 % de clients satisfaits, déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil approximatif de 95 % de la fréquence de personnes satisfaites dans un échantillon aléatoire de taille 900.

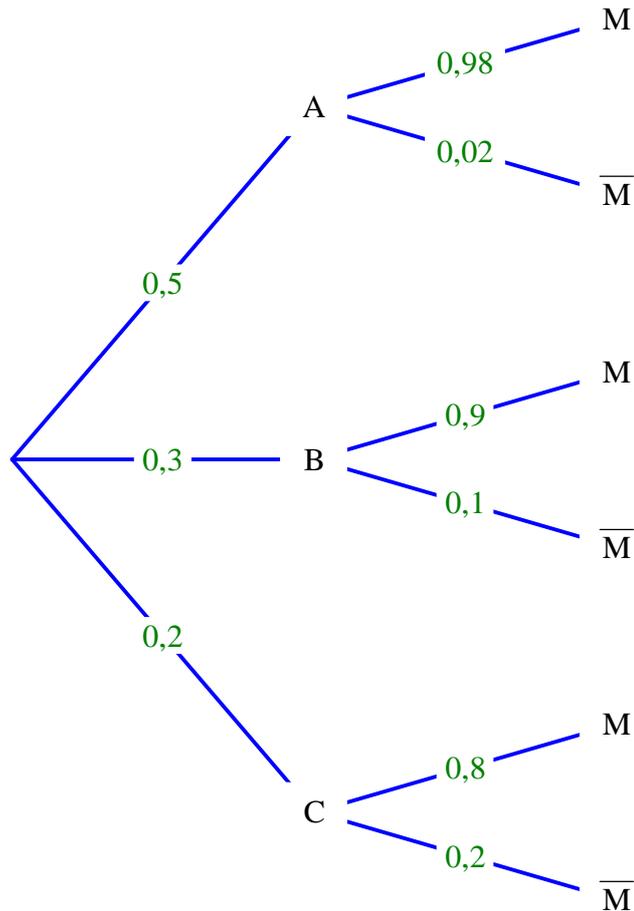
On donnera les bornes sous forme de fractions ayant pour dénominateur 900.

b) 735 clients ont déclaré être satisfaits.

Peut-on conclure que le niveau de satisfaction s'est maintenu la deuxième année ? Justifier.

Corrigé

1°) On considère les événements suivants :
A : « La fève provient du fournisseur 1 » ;
B : « La fève provient du fournisseur 2 » ;
C : « La fève provient du fournisseur 3 » ;
M : « La fève est conforme ».



On commence par calculer la probabilité de M.

A, B, C constituent un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(M) = P(A \cap M) + P(B \cap M) + P(C \cap M)$$

$$= P(A) \times P(M/A) + P(B) \times P(M/B) + P(C) \times P(M/C)$$

$$= 0,5 \times 0,98 + 0,3 \times 0,9 + 0,2 \times 0,8$$

$$= 0,92$$

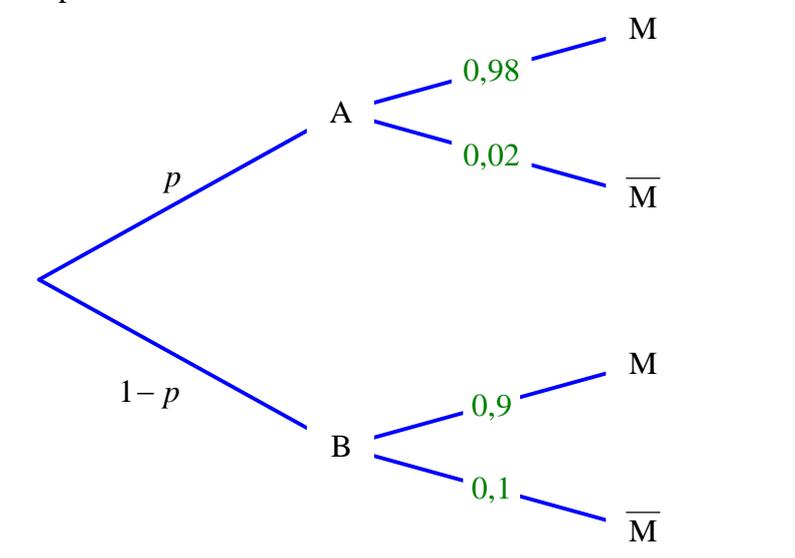
$$\begin{aligned}
 P(A/M) &= \frac{P(A \cap M)}{P(M)} && \text{(formule de définition de la probabilité conditionnelle)} \\
 &= \frac{0,5 \times 0,98}{0,92} \\
 &= \frac{0,49}{0,92} \\
 &= \frac{49}{92}
 \end{aligned}$$

$$P(B/M) = \frac{27}{92}$$

$$\begin{aligned}
 P(C/M) &= \frac{16}{92} \\
 &= \frac{4}{23}
 \end{aligned}$$

2°) Le troisième fournisseur ayant la plus forte proportion des fèves non conformes, l'entreprise décide de ne conserver que les fournisseurs 1 et 2. De plus, elle souhaite que 92 % des fèves qu'elle achète soient conformes. Le fournisseur 1 fournit alors une proportion p de fèves et l'entreprise 2 fournit le reste. Déterminer la valeur de p pour que l'objectif soit atteint. On donnera le résultat sous forme décimale.

On refait un nouvel arbre de probabilités :



Les événements A et B constituent un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales : $P(M) = P(A \cap M) + P(B \cap M)$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow 0,92 = P(A) \times P(M/A) + P(B) \times P(M/B)$$

$$\Leftrightarrow 0,92 = p \times 0,98 + (1-p) \times 0,9$$

$$\Leftrightarrow 0,92 = 0,98p + 0,9 - 0,9p$$

$$\Leftrightarrow 0,92 = 0,08p$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{0,02}{0,08}$$

$$\Leftrightarrow p = 0,25$$

3°) L'entreprise lance un nouveau produit à base de chocolat. Une enquête de satisfaction effectuée la première année a révélé que 85 % des clients étaient satisfaits du produit.

L'entreprise souhaite vérifier si le niveau de satisfaction reste le même la deuxième année. Pour cela, elle décide d'interroger un échantillon de 900 clients afin de conclure sur l'hypothèse d'un niveau de satisfaction maintenu.

a) a) Dans le cas où il y aurait exactement 85 % de clients satisfaits, déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil approximatif de 95 % de la fréquence de personnes satisfaites dans un échantillon aléatoire de taille 900. On donnera les bornes sous forme de fractions ayant pour dénominateur 900.

$$\left[\frac{744}{900} ; \frac{786}{900} \right]$$

On pourrait calculer le seuil exact de cet intervalle mais cela n'est pas demandé dans l'énoncé.

b) 735 clients ont déclaré être satisfaits.

Peut-on conclure que le niveau de satisfaction s'est maintenu la deuxième année ? Justifier.

La fréquence observée de clients satisfaits dans l'échantillon de la deuxième année $f = \frac{735}{900}$.

Cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation déterminé à la question précédente.

Donc l'hypothèse que le taux de clients satisfaits la deuxième année est de 85 % peut être rejetée au seuil approximatif de 95 %.