TS1

Devoir pour le 13 novembre 2017

La totalité du devoir doit tenir sur une copie simple.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1 = a$ où a est un réel donné et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)u_n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1°) Calculer u_2, u_3, u_4 en fonction de a.

2°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \frac{(n-1)!}{n}u_n$.

Démontrer que la suite (v_n) est une suite constante.

3°) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $u_n = \frac{an}{(n-1)!}$.

Corrigé

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1 = a$ où a est un réel donné et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)u_n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1°) Calculer u_2, u_3, u_4 en fonction de a.

$$u_2 = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1^2}\right) \times a = 2a$$

$$u_3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) \times 2a = \frac{3a}{2}$$

$$u_4 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\right) \times \frac{3a}{2} = \frac{4a}{3}$$

2°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \frac{(n-1)!}{n}u_n$.

Démontrer que la suite (v_n) est une suite constante.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} = \frac{n!}{n+1}u_{n+1}$$

$$= \frac{n!}{n+1} \times \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)u_n$$

$$= \frac{n!}{\cancel{n+1}} \times \frac{\cancel{n+1}}{n^2}u_n$$

$$= \frac{n!}{n^2}u_n$$

$$= \frac{n \times (n-1)!}{n^2}u_n$$

$$= \frac{(n-1)!}{n}u_n$$

$$= v_n$$

3°) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $u_n = \frac{an}{(n-1)!}$.

D'après la question précédente, la suite (v_n) est constante.

Or $v_1 = \frac{(1-1)!}{1} \times a = 0! \times a = a \quad (0! = 1 \text{ par convention})$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = a$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{(n-1)!}{n}u_n = a$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{an}{(n-1)!}$.