TS1

Devoir pour le lundi 6 novembre 2017

La totalité du devoir doit tenir sur une copie simple.

Dans les deux exercices, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

I. Soit z_1, z_2, …, z_n n nombres complexes fixés et a un nombre complexe fixé.

On pose $S = \sum_{k=1}^{k=n} {z_k}^2$.

On considère l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $\left(\sum_{k=1}^{k=n} (z+z_k)^2\right) + \left(\sum_{k=1}^{k=n} (z-z_k)^2\right) = a \quad (\mathrm{E})$.

1°) Recopier et compléter :

$$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow \ldots.$$

$$\Leftrightarrow \ldots.$$

$$\Leftrightarrow z^2 = \ldots.$$

2°) On suppose que $a - 2S$ est un réel.
Déterminer l'ensemble A des solutions de (E).

II. Soit a_1, a_2, …, a_n n réels strictement positifs.

Résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $\prod_{k=1}^{k=n} \left(z^2 + a_k\right) = 0 \quad (\mathrm{F})$.

Conseil pour le I :

Lire attentivement et étudier les exemples ainsi que les exercices de la fiche sur le symbole Σ (TS Rubrique « Fiches »).

Corrigé du devoir pour le 6-11-2017

I. Soit z_1, z_2, …, z_n n nombres complexes fixés et a un nombre complexe fixé.

On pose $S=\sum_{k=1}^{k=n} {z_k}^2$.

On considère l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $\left(\sum_{k=1}^{k=n}(z+z_k)^2\right)+\left(\sum_{k=1}^{k=n}(z-z_k)^2\right)=a \quad (\mathrm{E})$.

1°) Recopier et compléter :

$$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow \ldots.$$

$$\Leftrightarrow \ldots.$$

$$\Leftrightarrow z^2 = \ldots.$$

On va se débarrasser du symbole Σ dans le premier membre.

$$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{k=n}\left(z^2+2zz_k+z_k^{\ 2}\right)\right)+\left(\sum_{k=1}^{k=n}\left(z^2-2zz_k+z_k^{\ 2}\right)\right)=a$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{k=n}\left(z^2 \cancel{+2zz_k}+z_k^{\ 2}+z^2 \cancel{-2zz_k}+z_k^{\ 2}\right)=a$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{k=n}\left(2z^2+2z_k^{\ 2}\right)=a$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{k=1}^{k=n}\left(z^2+z_k^{\ 2}\right)=a$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sum_{k=1}^{k=n}z^2+\sum_{k=1}^{k=n}z_k^{\ 2}\right)=a$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{k=1}^{k=n}z^2+2S=a$$

$\Leftrightarrow 2nz^2+2S=a$ (l’entier naturel n est introduit au début de l’énoncé)

$$\Leftrightarrow 2nz^2=a-2S$$

$$\Leftrightarrow z^2=\frac{a-2S}{2n}$$

2°) On suppose que $a-2S$ est un réel.
Déterminer l’ensemble A des solutions de (E).

On discute suivant le signe de $\dfrac{a-2S}{2n}$.

Comme n est un entier naturel strictement positif, le signe de $\dfrac{a-2S}{2n}$ est le même que celui de $a-2S$.

L’énoncé désigne par A l’ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{C}$.

1er cas : $a-2S>0$

Dans ce cas, $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow z=\sqrt{\dfrac{a-2S}{2n}}$ ou $z=-\sqrt{\dfrac{a-2S}{2n}}$.

$$\mathrm{A}=\left\{\sqrt{\frac{a-2S}{2n}}\ ;-\sqrt{\frac{a-2S}{2n}}\right\}$$

2^e^ cas : $a-2S=0$

Dans ce cas, $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow z=0$.

$\mathrm{A}=\{0\}$

3^e^ cas : $a-2S<0$

Dans ce cas, $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow z=\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{2S-a}{2n}}$ ou $z=-\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{2S-a}{2n}}$.

$$\mathrm{A}=\left\{\mathrm{i}\sqrt{\frac{2S-a}{2n}}\ ;-\mathrm{i}\sqrt{\frac{2S-a}{2n}}\right\}$$

II. Soit $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ n réels strictement positifs.

Résoudre l'équation suivante d'inconnue $z\in\mathbb{C}$: $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n}\left(z^2+a_k\right)=0 \quad (\mathrm{F})$.

On note A l'ensemble des solutions de (F) dans $\mathbb{C}$.

(F) est une équation produit nul.

1^ère^ méthode :

$$(\mathrm{F}) \Leftrightarrow \left(z^2+a_1\right)\left(z^2+a_2\right)\ldots\left(z^2+a_n\right)=0$$

$$\Leftrightarrow z^2+a_1=0 \text{ ou } z^2+a_2=0 \text{ ou } \ldots \text{ ou } z^2+a_n=0$$

$$\Leftrightarrow z^2=-a_1 \text{ ou } z^2=-a_2 \text{ ou } \ldots \text{ ou } z^2=-a_n$$

$$\Leftrightarrow z=\mathrm{i}\sqrt{a_1} \text{ ou } z=-\mathrm{i}\sqrt{a_1} \text{ ou } z=\mathrm{i}\sqrt{a_2} \text{ ou } z=-\mathrm{i}\sqrt{a_2} \text{ ou } \ldots \text{ ou } z=\mathrm{i}\sqrt{a_n} \text{ ou } z=-\mathrm{i}\sqrt{a_n}$$

On a $\mathrm{A}=\left\{\mathrm{i}\sqrt{a_1}\ ;-\mathrm{i}\sqrt{a_1}\ ;\mathrm{i}\sqrt{a_2}\ ;-\mathrm{i}\sqrt{a_2}\ ;\ldots;\mathrm{i}\sqrt{a_n}\ ;-\mathrm{i}\sqrt{a_n}\right\}$.

On peut écrire $\mathrm{A}=\left\{\mathrm{i}\sqrt{a_1}\ ;\mathrm{i}\sqrt{a_2}\ ;\ldots;\mathrm{i}\sqrt{a_n}\right\}\cup\left\{-\mathrm{i}\sqrt{a_1}\ ;-\mathrm{i}\sqrt{a_2}\ ;\ldots;-\mathrm{i}\sqrt{a_n}\right\}$ ou aussi
$\mathrm{A}=\left\{\mathrm{i}\sqrt{a_1}\ ;-\mathrm{i}\sqrt{a_1}\right\}\cup\left\{\mathrm{i}\sqrt{a_2}\ ;-\mathrm{i}\sqrt{a_2}\right\}\cup\ldots\cup\left\{\mathrm{i}\sqrt{a_n}\ ;-\mathrm{i}\sqrt{a_n}\right\}$.

Dans le supérieur, on écrira : $\mathrm{A}=\left\{\mathrm{i}\sqrt{a_k}, 1\leqslant k\leqslant n\right\}\cup\left\{-\mathrm{i}\sqrt{a_k}, 1\leqslant k\leqslant n\right\}$ ou $\mathrm{A}=\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n}\left\{\mathrm{i}\sqrt{a_k}\ ;-\mathrm{i}\sqrt{a_k}\right\}$.

2e méthode :

$(\mathrm{F}) \Leftrightarrow \exists k \in \{1\,;\,2\,;\,...\,;\,n\} \quad z^2 + a_k = 0$

Pour tout entier naturel $k \in \{1\,;\,2\,;\,...\,;\,n\}$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 + a_k = 0$ sont $\mathrm{i}\sqrt{a_k}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{a_k}$.