

Développement du produit de deux sommes et du carré d'une somme

Utilisation du symbole Σ

I. Formule de développement du produit de deux sommes

Soit p et q deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.

Soit (u_1, u_2, \dots, u_p) un p -uplet de réels et (v_1, v_2, \dots, v_q) un q -uplet de réels.

On cherche à développer $\left(\sum_{i=1}^{i=p} u_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^{j=q} v_j \right)$.

Par simple distributivité de la multiplication sur l'addition, on peut écrire $\left(\sum_{i=1}^{i=p} u_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^{j=q} v_j \right) = \sum_{i=1}^{i=p} \left(\sum_{j=1}^{j=q} u_i v_j \right)$

On peut aussi écrire $\left(\sum_{i=1}^{i=p} u_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^{j=q} v_j \right) = \sum_{j=1}^{j=q} \left(\sum_{i=1}^{i=p} u_i v_j \right)$.

On peut aussi écrire le développement sous la formule d'une somme double :

$$\left(\sum_{i=1}^{i=p} u_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^{j=q} v_j \right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} u_i v_j .$$

Il s'agit d'une formule de double distributivité.

II. Développement du carré d'une somme

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Soit (x_1, x_2, \dots, x_n) un n -uplet de réels.

On cherche à développer $\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i\right)^2$.

En appliquant le résultat du **I**, on peut écrire une première formule sous la forme d'une somme double :

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i\right)^2 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} x_i x_j .$$

En séparant les cas $i = j$ et $i \neq j$, on peut aussi écrire une formule sous la forme de sommes simples :

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2\right) + \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} x_i x_j\right) .$$

Enfin, on peut écrire : $\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2\right) + 2\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j\right)$ (formule à savoir).

Exemple :

Pour tout triplet $(a ; b ; c)$ de réels, $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.