TS Exercices avec prise d'initiative sur les nombres complexes

$\boxed{1}$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \overline{z}^2$ (E).

On notera que la notation $\overline{z}^2$ désigne le conjugué de z au carré.
Écrire l'ensemble S des solutions de l'équation (E).

$\boxed{2}$ On se place dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Déterminer l'ensemble E des points M de P d'affixe z tels que $z^2 \in \mathbb{R}$.
Déterminer l'ensemble F des points M de P d'affixe z tels que $z^2 \in \text{i}\mathbb{R}$.

$\boxed{3}$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\overline{z} = \text{i}z$ (E).

Écrire l'ensemble S des solutions de (E).

$\boxed{4}$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2\lambda z + 2\lambda^2 + 1 = 0$ (E) où λ est un réel.

Discuter suivant les valeurs de λ.

Même question avec les équations $z^2 + 2\lambda z + \lambda^2 + 1 = 0$ (F) et $z^2 + 2\lambda z + 2\lambda^2 - 1 = 0$ (G).

$\boxed{5}$ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{C}^*$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = \dfrac{z}{\overline{z}}$.

Déterminer les antécédents de 1 et de – 1 par f.

On répond sans aucun calcul.

$\boxed{6}$ On pose $j = \dfrac{-1 + \text{i}\sqrt{3}}{2}$.

Calculer j^{2019}.

$\boxed{7}$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \text{i}$.

Solutions

$\boxed{1}$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \overline{z}^2$ $\quad(\mathrm{E})$.

Écrire l'ensemble S des solutions de l'équation (E).

1ère méthode :

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont deux réels.
On a alors $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$.

$$\begin{aligned}
(\mathrm{E}) &\Leftrightarrow (x+\mathrm{i}y)^2 = (x-\mathrm{i}y)^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 = x^2 - 2\mathrm{i}xy - y^2 \\
&\Leftrightarrow 4\mathrm{i}xy = 0 \\
&\Leftrightarrow xy = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \ \text{ ou } \ y = 0 \\
&\Leftrightarrow z \text{ est réel ou } z \text{ est imaginaire pur}
\end{aligned}$$

On peut donc écrire $S = \mathbb{R} \cup \mathrm{i}\mathbb{R}$. Il s'agit d'une égalité d'ensembles.

2e méthode (meilleure) :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{E}) &\Leftrightarrow z = \overline{z} \ \text{ ou } \ z = -\overline{z} \\
&\Leftrightarrow z \text{ est réel ou } z \text{ est imaginaire pur}
\end{aligned}$$

On peut donc écrire $S = \mathbb{R} \cup \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Les élèves ont bien fait la résolution par deux méthodes : en posant $z = x + \mathrm{i}y$ ou sans poser.
En revanche, ils n'ont pas réussi à écrire S correctement.
Il y a eu des difficultés pour comprendre pourquoi ce n'est pas le couple $(0\,;0)$.
J'ai trouvé par exemple $S = \{0\,;0\}$ ou $S = \{(0\,;0)\}$.

$\boxed{2}$ On se place dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Déterminer l'ensemble E des points M de P d'affixe z tels que $z^2 \in \mathbb{R}$.
Déterminer l'ensemble F des points M de P d'affixe z tels que $z^2 \in \text{i}\mathbb{R}$.

On pose $z = x + \text{i}y$ où x et y sont deux réels.

$z^2 = \left(x + \text{i}y\right)^2$

$z^2 = x^2 + 2\text{i}xy - y^2$

$\text{Re}\left(z^2\right) = x^2 - y^2$ et $\text{Im}\left(z^2\right) = 2xy$

Soit M un point quelconque de P d'affixe $z = x + \text{i}y$ où x et y sont deux réels.

$$
\begin{aligned}
\text{M} \in E \quad & \Leftrightarrow \quad z^2 \in \mathbb{R} \\
& \Leftrightarrow \quad \text{Im}\left(z^2\right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad xy = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0
\end{aligned}
$$

E est donc la réunion de l'axe des réels et de l'axe des imaginaires purs.

Soit M un point quelconque de P d'affixe $z = x + \text{i}y$ où x et y sont deux réels.

$$
\begin{aligned}
\text{M} \in F \quad & \Leftrightarrow \quad z^2 \in \text{i}\mathbb{R} \\
& \Leftrightarrow \quad \text{Re}\left(z^2\right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \left(x - y\right)\left(x + y\right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x - y = 0 \ \text{ ou } \ x + y = 0
\end{aligned}
$$

On sait que les égalités $x - y = 0$ ou $x + y = 0$ sont des équations de droites.

F est donc la réunion des droites d'équations $x - y = 0$ et $x + y = 0$.

Autre méthode pour l'ensemble E :

Soit M un point quelconque de P d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont deux réels.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M} \in E \ &\Leftrightarrow\ z^2 \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow\ \overline{z^2} = z^2 \\
&\Leftrightarrow\ \left(\overline{z}\right)^2 = z^2 \\
&\Leftrightarrow\ \left(\overline{z}\right)^2 = z^2 \\
&\Leftrightarrow\ \overline{z} = z \ \text{ ou } \ \overline{z} = -z \\
&\Leftrightarrow\ z \text{ est réel ou } z \text{ est imaginaire pur}
\end{aligned}
$$

E est donc la réunion de l'axe des réels et de l'axe des imaginaires purs.

Cet exercice peut être traité en utilisant la notion d'argument.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\overline{z} = \mathrm{i}z \quad (\mathrm{E})$.
Écrire l'ensemble S des solutions de (E).

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont deux réels.

On a alors $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$.

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{E}) \ &\Leftrightarrow\ x - \mathrm{i}y = \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) \\
&\Leftrightarrow\ x - \mathrm{i}y = \mathrm{i}x - y \\
&\Leftrightarrow\ \begin{cases} x = -y \\ -y = x \end{cases} \qquad \text{(identification des parties réelle et imaginaire)} \\
&\Leftrightarrow\ y = -x
\end{aligned}
$$

Variante :

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{E}) \ &\Leftrightarrow\ x - \mathrm{i}y = \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) \\
&\Leftrightarrow\ x - \mathrm{i}y = \mathrm{i}x - y \\
&\Leftrightarrow\ (x + y) + \mathrm{i}(x + y) = 0 \\
&\Leftrightarrow\ (x + y)(1 + \mathrm{i}) = 0 \\
&\Leftrightarrow\ x + y = 0 \\
&\Leftrightarrow\ y = -x
\end{aligned}
$$

Conclusion :

Les solutions de (E) sont les nombres complexes de la forme $x - \mathrm{i}x$, x décrivant $\mathbb{R}$.

L'ensemble des solutions S de (E) est l'ensemble des nombres complexes de la forme $x - \mathrm{i}x$ lorsque x décrit $\mathbb{R}$ (ensemble infini).

L'ensemble des solutions S de (E) est l'ensemble des nombres complexes de la forme $x-\mathrm{i}x$ lorsque x décrivant $\mathbb{R}$.

On peut écrire $S=\{x-\mathrm{i}x,\ x\in\mathbb{R}\}$.

Autre façon :

On pose $z=x+\mathrm{i}y$ où x et y sont deux réels.

On a alors $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$.

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{E}) &\Leftrightarrow x-\mathrm{i}y=\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)\\
&\Leftrightarrow x-\mathrm{i}y=\mathrm{i}x-y\\
&\Leftrightarrow (x+y)-\mathrm{i}(x+y)=0\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x+y=0\\ x+y=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow x+y=0\\
&\Leftrightarrow y=-x
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+2\lambda z+2\lambda^2+1=0$ (E) où λ est un réel.
Discuter suivant les valeurs de λ.

Même question avec les équations $z^2+2\lambda z+\lambda^2+1=0$ (F) et $z^2+2\lambda z+2\lambda^2-1=0$ (G).

(E) est une équation du second degré à coefficient réel qui dépend du paramètre λ.

On pose $a=1$, $b=2\lambda$ et $b'=\dfrac{b}{2}$, $c=2\lambda^2+1$.

Calculons le discriminant réduit Δ' (formule $\Delta'=\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-ac$ avec les notations classiques).

$$
\begin{aligned}
\Delta' &= \lambda^2-\left(2\lambda^2+1\right)\\
&= -\lambda^2-1
\end{aligned}
$$

$\Delta'<0$ donc l'équation admet 2 racines complexes conjuguées dans $\mathbb{C}$:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{-b'-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta'}}{a} & \qquad z_2 &= \frac{-b'+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta'}}{a}\\
&= \frac{-\lambda-\mathrm{i}\sqrt{\lambda^2+1}}{1} & &= \frac{-\lambda+\mathrm{i}\sqrt{\lambda^2+1}}{1}\\
&= -\lambda-\mathrm{i}\sqrt{\lambda^2+1} & &= -\lambda+\mathrm{i}\sqrt{\lambda^2+1}
\end{aligned}
$$

Soit S l'ensemble des solutions de l'équation (E).

$$S=\left\{-\lambda+\mathrm{i}\sqrt{\lambda^2+1}\,;-\lambda-\mathrm{i}\sqrt{\lambda^2+1}\right\}$$

$\boxed{\textbf{5}}$ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{C}^*$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $f(z)=\dfrac{z}{\overline{z}}$.

Déterminer les antécédents de 1 et de – 1 par f.

On répond sans aucun calcul.

Pour déterminer les antécédents de 1 et de – 1 par f, on résout dans $\mathbb{C}^*$ les équations $f(z)=1 \quad (1)$ et $f(z)=-1 \quad (2)$.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \frac{z}{\overline{z}}=1\\ &\Leftrightarrow z=\overline{z}\\ &\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}^*\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow \frac{z}{\overline{z}}=-1\\ &\Leftrightarrow z=-\overline{z}\\ &\Leftrightarrow z\in(\mathrm{i}\mathbb{R})^*\end{aligned}$$

L'ensemble des antécédents de 1 par f est $\mathbb{R}^*$.

L'ensemble des antécédents de – 1 par f est $(\mathrm{i}\mathbb{R})^*$.

$\boxed{\textbf{6}}$ On vérifie par le calcul que $j^3=1$.
2019 est un multiple de 3 : $2019=3\times673$.

On en déduit que $j^{2019}=\left(j^3\right)^{673}=1$.

$\boxed{7}$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \mathrm{i} \quad (1)$.

Il n'est pas possible d'écrire $\sqrt{\mathrm{i}}$.

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont deux réels.

$(1) \Leftrightarrow (x+\mathrm{i}y)^2 = \mathrm{i}$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy = \mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases}$ (par identification des parties réelle et imaginaire)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ 2xy = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \text{ ou } x = -y \\ 2xy = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^2 = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -y \\ -2x^2 = 1 \end{cases}$ impossible pour $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x = y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ ou $z = -\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$

Soit S l'ensemble des solutions de l'équation (1).

$$S = \left\{ \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} ; -\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \right\}$$

On peut dire que $\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ et $-\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ sont les racines carrées de i.

Autre démarche qui ne fonctionne pas : il ne s'agit que d'implications et non d'équivalences.

$(1) \Rightarrow z^2 = \mathrm{i}$

$\Rightarrow z^4 = \mathrm{i}^2$

$\Rightarrow z^4 = -1$

$\Rightarrow z^2 = \mathrm{i}$ ou $z^2 = -\mathrm{i}$