1ère S1

Contrôle du mardi 6 juin 2017
(50 min)

Prénom : ………………………………. **Nom :** ……………………………….

Note : …. / 20

I. (2 points : 1 point + 1 point)

On pose $I=[-\pi\,;\pi]$.

Résoudre dans I l'équation $|1-2\cos x|=2\ (1)$ et l'inéquation $4\sin^2 x-1<0\ (2)$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

II. (9 points : 1°) 2 points ; 2°) 7 points)

1°) Question de cours

Compléter les équivalences suivantes où a et b sont deux réels quelconques.

$$\cos a=\cos b \Leftrightarrow \begin{cases} \text{……………………………………………………} \\ \text{ou} \\ \text{……………………………………………………} \end{cases}$$

$$\sin a=\sin b \Leftrightarrow \begin{cases} \text{……………………………………………………} \\ \text{ou} \\ \text{……………………………………………………} \end{cases}$$

2°) On considère les égalités suivantes où x désigne un réel quelconque : $\cos x=0\ (1)$, $\sin x=1\ (2)$, $\cos x=-\dfrac{1}{2}\ (3)$, $\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ (4)$, $\sin x=0\ (5)$, $\cos x\times\sin x=0\ (6)$, $4\cos x\times\sin x=1\ (7)$.

Compléter les équivalences à l'aide des propositions suivantes :

$x=\dfrac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$; $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$; $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$; $x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$;

$x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ ou $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2k'\pi\ (k'\in\mathbb{Z})$;

$x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ ou $x=\dfrac{5\pi}{6}+2k'\pi\ (k'\in\mathbb{Z})$; $x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ ou $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2k'\pi\ (k'\in\mathbb{Z})$.

$(1) \Leftrightarrow$ ……………………………………………………………………………………………

$(2) \Leftrightarrow$ ……………………………………………………………………………………………

$(3) \Leftrightarrow$ ……………………………………………………………………………………………

$(4) \Leftrightarrow$ ……………………………………………………………………………………………

$(5) \Leftrightarrow$ ……………………………………………………………………………………………

$(6) \Leftrightarrow$ ……………………………………………………………………………………………

$(7) \Leftrightarrow$ ……………………………………………………………………………………………

III. (2 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 3x = \frac{1}{2}$ (1). Marquer les images des solutions sur un cercle trigonométrique.

………

………

………

………

………

………

IV. (3 points)

On considère la suite géométrique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et sa raison $q = -2$.

On souhaite savoir, à l'aide d'un algorithme, quel est le plus petit entier naturel n tel que $|u_n| > 1000$.

Compléter la partie « Traitement » de l'algorithme ci-dessous.

Initialisation :
n prend la valeur 0

Traitement :
Tantque …………………… **Faire**

u prend la valeur …………………..

n prend la valeur …………………..

FinTantque

Sortie :
Afficher *n*

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = a$ où a est un réel et la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n + 4$ pour tout entier naturel n.

1°) On suppose que la suite (u_n) est constante. On a alors $u_1 = u_0$.
Cocher la phrase correcte.

☐ L'égalité $u_1 = u_0$ est une condition nécessaire pour que la suite (u_n) soit constante.

☐ L'égalité $u_1 = u_0$ est une condition suffisante pour que la suite (u_n) soit constante.

Faire alors une phrase correcte commençant par « Pour que la suite (u_n) soit constante » et utilisant l'une expressions « il faut » ou « il suffit que ».

………

………

2°) Déterminer la valeur de a pour laquelle $u_1 = u_0$ (1). Utiliser une chaîne d'équivalences.

………

………

………

………

………

Faire alors une phrase correcte commençant par « Pour que la suite (u_n) soit constante » et utilisant l'égalité $a = ...$ où les petits points seront remplacés par la valeur qui a été trouvée précédemment.

………

………

3°) Pour la valeur de a ainsi trouvée la suite (u_n) est-elle constante ? Répondre par oui ou non sans justifier.

………………

Corrigé du contrôle du 6-6-2017

I.

On pose $I=[-\pi\,;\,\pi]$.

Résoudre dans I l'équation $|1-2\cos x|=2$ (1) et l'inéquation $4\sin^2 x-1<0$ (2).

$(1) \Leftrightarrow 1-2\cos x=2$ ou $1-2\cos x=-2$

$\Leftrightarrow \cos x=-\dfrac{1}{2}$ ou $\cos x=\dfrac{3}{2}$ (impossible)

$\Leftrightarrow x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=-\dfrac{2\pi}{3}$ (résultats obtenus grâce à un cercle trigonométrique)

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$$S_1=\left\{\frac{2\pi}{3}\,;\,-\frac{2\pi}{3}\right\}$$

$(2) \Leftrightarrow \sin^2 x<\dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<\sin x<\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -\pi\leqslant \sin x<-\dfrac{5\pi}{6}$ ou $-\dfrac{\pi}{6}<\sin x<\dfrac{\pi}{6}$ ou $\dfrac{5\pi}{6}<\sin x\leqslant\pi$ (résultats obtenus grâce à un cercle trigonométrique)

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$$S_2=\left[-\pi\,;\,-\frac{5\pi}{6}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{6}\,;\,\pi\right]$$

II.

1°) **Question de cours**

Compléter les équivalences suivantes où a et b sont deux réels quelconques.

$$\cos a=\cos b \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ a=b+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\sin a=\sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ a=\pi-b+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

2°) On considère les égalités suivantes où x désigne un réel quelconque : $\cos x=0$ (1), $\sin x=1$ (2), $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ (3), $\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (4), $\sin x=0$ (5), $\cos x\times\sin x=0$ (6), $4\cos x\times\sin x=1$ (7).

Compléter les équivalences à l'aide des propositions suivantes :

$x=\dfrac{k\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$; $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$; $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$; $x=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$;
$x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ ou $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2k'\pi$ $(k'\in\mathbb{Z})$;
$x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ ou $x=\dfrac{5\pi}{6}+2k'\pi$ $(k'\in\mathbb{Z})$; $x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ ou $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2k'\pi$ $(k'\in\mathbb{Z})$.

$(1) \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

$(2) \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

$(3) \Leftrightarrow x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ ou $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2k'\pi$ $(k'\in\mathbb{Z})$

$(4) \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ ou $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2k'\pi$ $(k'\in\mathbb{Z})$

$(5) \Leftrightarrow x=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

$(6) \Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$

$(7) \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ ou $x=\dfrac{5\pi}{6}+2k'\pi$ $(k'\in\mathbb{Z})$

Quelques détails :

• Pour l'équation (6), il y a deux méthodes.

1[ère] méthode :

$(6) \Leftrightarrow \cos x = 0$ ou $\sin x = 0$ (règle du produit nul)

On sait que les équations $\cos x = 0$ et $\sin x = 0$ sont des équations particulières.
Les solutions de l'équation $\cos x = 0$ sont tous les réels de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Les solutions de l'équation $\sin x = 0$ sont tous les réels de la forme $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Grâce au cercle trigonométrique, il est possible de voir que la réunion de ces deux familles peut s'écrire sous la forme d'une seule famille, à savoir les multiples entiers de $\frac{\pi}{2}$.

Il est donc possible d'écrire que les solutions de l'équation (6) sont les réels de la forme $x = \frac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2[e] méthode :

On linéarise le 1[er] membre en utilisant la formule de duplication : $\sin 2x = 2\sin x \times \cos x$.

$(6) \Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \sin 2x = 0$

Il se trouve que les deux familles peuvent se ramener en une seule.

• Pour l'équation (7), la seule méthode consiste à linéariser le premier membre en utilisant la formule de duplication : $\sin 2x = 2\sin x \times \cos x$.

$(7) \Leftrightarrow 2\sin 2x = 1$

$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$

On poursuit ensuite classiquement.

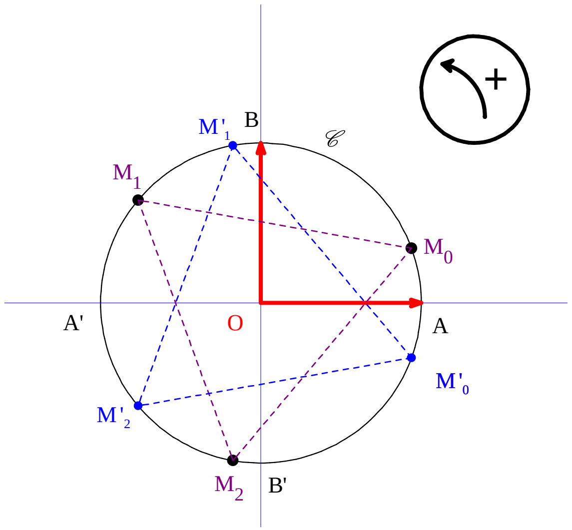
III.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 3x = \frac{1}{2}$ (1). Marquer les images des solutions sur un cercle trigonométrique.

$(1) \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 3x = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$ (on « enlève » les cos avec la règle rappelée dans le **II**.)

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k'\pi}{3} \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$



Il y a deux familles de solutions.

Les points M_0, M_1, M_2 correspondent à la première famille de solutions quand on prend respectivement $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$.

Les points M'_0, M'_1, M'_2 correspondent à la deuxième famille de solutions quand on prend respectivement $k' = 0$, $k' = 1$ et $k' = 2$.

Les points M_0, M_1, M_2 forment un triangle équilatéral. De même, les points M'_0, M'_1, M'_2.

Ces deux triangles équilatéraux ont été tracés en pointillés.

On peut écrire l'ensemble des solutions : $S=\left\{\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{-\frac{\pi}{9}+\frac{2k'\pi}{3},\ k'\in\mathbb{Z}\right\}$.

Cette écriture n'était pas demandée dans l'énoncé.

IV.

On considère la suite géométrique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=1$ et sa raison $q=-2$.

On souhaite savoir, à l'aide d'un algorithme, quel est le plus petit entier naturel n tel que $|u_n|>1000$.

Compléter la partie « Traitement » de l'algorithme ci-dessous.

Initialisation :
n prend la valeur 0

Traitement :
Tantque …………………… **Faire**

  u prend la valeur …………………..

  n prend la valeur …………………..

FinTantque

Sortie :
Afficher *n*

Initialisation :
n prend la valeur 0

Traitement :
Tantque $|u|\leqslant 1000$ **Faire**
  u prend la valeur – 2*u*
  n prend la valeur $n+1$
FinTantque

Sortie :
Afficher *n*

Commentaires :

Pour l'instruction « *u* prend la valeur – 2*u* », on se réfère à la formule de récurrence $u_{n+1}=-2u_n$ qui définit la suite u_n par récurrence.

On pourrait aussi utiliser la formule $u_n=(-2)^n$ mais cela est moins dans l'esprit de l'algorithme.

La notation u_n ne doit pas apparaître dans l'algorithme.

On écrit– 2*u* plutôt que $u\times(-2)$.