TS spé

EPI 2

On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = nu_n + 1$ pour tout entier naturel *n*.

On ne cherchera pas l'expression de u_n en fonction de *n*.

1°) Démontrer que tous les termes de la suite (u_n) sont des entiers naturels.

2°) Déterminer le dernier chiffre de l'écriture en base 10 de u_{2016}.

Solution

On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = nu_n + 1$ pour tout entier naturel *n*.

On ne cherchera pas l'expression de u_n en fonction de *n*.

1°) Démontrer que tous les termes de la suite (u_n) sont des entiers naturels.

On effectue une récurrence.

2°) Déterminer le dernier chiffre de l'écriture en base 10 de u_{2016}.

On peut commencer par calculer les premiers termes de la suite.
Lorsque l'on rentre la suite dans la calculatrice, on voit qu'on est assez vite en dépassement de capacité.

On a : $u_{2016} = 2015 \times u_{2015} + 1$ et $u_{2015} = 2014 \times u_{2014} + 1$.

$2014 \times u_{2014}$ est un entier pair donc u_{2015} est un entier impair.

Par suite, $2015 \times u_{2015}$ est un entier dont l'écriture en base 10 se termine par 5.

Comme on ajoute 1, l'écriture en base 10 de u_{2016} se termine par 6.

Variante :

$$u_{2016} = 2015 \times \left(2014 \times u_{2014} + 1\right) + 1$$

$$= 2015 \times 2014 \times u_{2014} + 2015 + 1$$

$$= ....0 + 2016$$

$$= ....6$$

Le dernier chiffre est 6.

On peur effectuer éventuellement le calcul 2015×2014.

On obtient $2015 \times 2014 = 4058910$.

Complément :

On pose $v_n = \dfrac{u_n}{(n-1)!}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{n!} = \dfrac{u_n}{(n-1)!} + 1 = v_n + \dfrac{1}{n!}$

Ainsi, pour $n \geqslant 2$

$\cancel{v_2} = v_1 + \dfrac{1}{1!}$

$\cancel{v_3} = \cancel{v_2} + \dfrac{1}{2!}$

$\dots$

$v_n = \cancel{v_{n-1}} + \dfrac{1}{(n-1)!}$

$$v_n = v_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}$$

Or $v_1 = \dfrac{u_1}{0!} = 1$ donc on peut écrire $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = (n-1)! \times \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$.