Continue partout, dérivable nulle part

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) croyait qu'une fonction continue était toujours dérivable sauf éventuellement en quelques points isolés. Mais vers 1830, Bernard Bolzano exhiba le premier cas de fonction continue partout mais nulle part dérivable. En 1872, Karl Weierstrass publia une famille de fonctions du même genre.

En 1903, Teiji Takagi a décrit une courbe fractale appelée **courbe du blancmange**, surnommée ainsi pour sa ressemblance à l'entremets du même nom, représentant la fonction blanc définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{blanc}(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \left| 2^k x - \left\lfloor 2^k x + \frac{1}{2} \right\rfloor \right|.$$

$\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière par défaut (*floor*, « plancher ») de x.
La fonction blanc est définie et continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période 1 mais elle n'est dérivable en aucun point.

1) À quoi calculer $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ revient-il plus simplement en pratique ?

2) a) Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique et créer un curseur entier k.

b) Représenter la fonction f_k définie par $f_k(x) = \frac{1}{2^k} \left| 2^k x - \left\lfloor 2^k x + \frac{1}{2} \right\rfloor \right|$.

c) Faire varier le curseur k. Comment peut-on désigner les courbes obtenues ?

d) Trouver un moyen d'ajouter les fonctions f_k pour k variant de 0 jusqu'à 10 afin d'obtenir une courbe qui approche la courbe du blancmange.