Des discontinuités... en continu !

Soit x et y deux réels tels que $x < y$.

Définissons la suite $(d_n)_{n \geqslant 0}$ telle que $d_n = \dfrac{\lfloor 10^n y \rfloor}{10^n}$ où $\lfloor a \rfloor$ désigne la partie entière de a.

1) À quel ensemble les nombres d_n appartiennent-ils ? • $\mathbb{N}$? • $\mathbb{Z}$? • $\mathbb{D}$? • $\mathbb{Q}$? • $\mathbb{R}$?

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement $\dfrac{10^n y - 1}{10^n} < d_n \leqslant y$.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n$.

3) a) Montrer que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geqslant N$, $|d_n - y| < \varepsilon$.

b) En posant $\varepsilon = y - x$, en déduire que $x \leqslant d_N \leqslant y$.

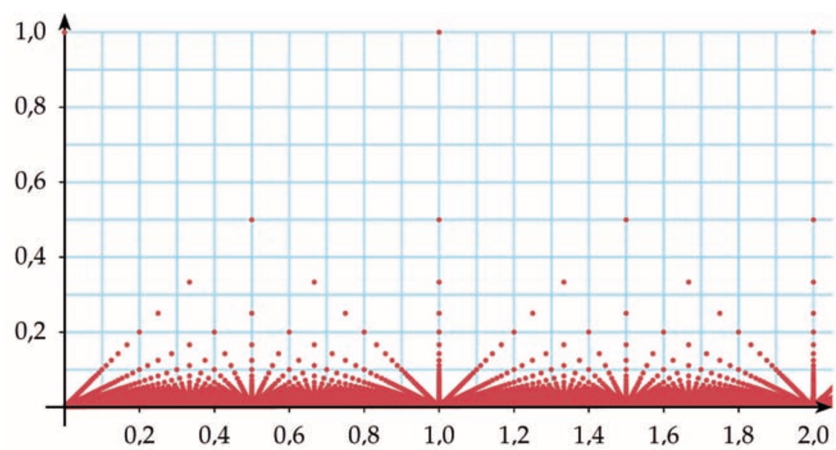
> On vient de montrer qu'entre deux réels, il existe toujours un décimal et donc toujours un rationnel.
> On dit que l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est **dense** dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

La **fonction de Dirichlet** D et la **fonction de Thomae** T sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{D}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathrm{T}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q} \text{ est une fraction irréductible} \end{cases}$$

Introduite par Dirichlet[2] en 1829, la fonction D est discontinue partout ce que le résultat établi précédemment montre. Cette fonction est appelée aussi **fonction indicatrice des rationnels**.

Introduite par Thomae[3] en 1875, la fonction T est continue en tout nombre irrationnel mais discontinue en tout nombre rationnel. Cette fonction est appelée aussi la **fonction popcorn** (voir sa représentation ci-dessous !).



2. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), mathématicien allemand
3. Carl Johannes Thomae (1840–1921), mathématicien allemand