# TS spé

# Fiche sur suites et matrices

## I.

$a$, $b$, $c$, $d$ sont des réels donnés.

$(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

- leurs premiers termes $u_0$ et $v_0$ ;
- les relations de récurrences $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases}$.

Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont des suites couplées.

On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel $n$, on pose $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ (matrice colonne).

La suite $(\mathrm{X}_n)$ est une suite de matrices colonnes.

On vérifie immédiatement que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{A}\mathrm{X}_n}$ (relation de récurrence).

On a alors $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n \mathrm{X}_0}$ (expression du terme général).

Il est intéressant de connaître les résultats suivants :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{X}_n = \mathrm{A}^{n-1} \mathrm{X}_1}$

et plus généralement :

$\boxed{\text{pour tout couple } (n\,;m) \text{ d'entiers naturels tels que } n \geqslant m \quad \mathrm{X}_n = \mathrm{A}^{n-m} \mathrm{X}_m}$.

*Remarques :*

- Grâce à la calculatrice, on peut calculer les premiers termes de la suite (commande « rép » ou programme).
- Lorsque l'on connaît les coefficients de $\mathrm{A}^n$ en fonction de $n$, on en déduit l'expression de $\mathrm{X}_n$ et donc les expressions de $u_n$ et $v_n$.
- Dans certains problèmes on étudiera la limite de la suite $(\mathrm{X}_n)$.

**Adaptation à des matrices lignes :**

On pose $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ ($\mathrm{B}$ = transposée de A).

Pour tout entier naturel $n$, on pose $\mathrm{Y}_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix}$ ($\mathrm{Y}_n$ = transposée de $\mathrm{X}_n$).

La suite $(\mathrm{Y}_n)$ est une suite de matrices lignes.

On vérifie immédiatement que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{Y}_{n+1} = \mathrm{Y}_n \mathrm{B}}$ (relation de récurrence).

On a alors $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{Y}_n = \mathrm{Y}_0 \mathrm{B}^n}$ (expression du terme général).

Il est intéressant de connaître les résultats suivants :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{Y}_n = \mathrm{Y}_1 \mathrm{B}^{n-1}}$

et plus généralement :

$\boxed{\text{pour tout couple } (n\,;m) \text{ d'entiers naturels tels que } n \geqslant m \quad \mathrm{Y}_n = \mathrm{Y}_m \mathrm{B}^{n-m}}$.

Ce qui vient d'être présenté se généralise aisément à l'étude de plusieurs suites (par exemple, trois) vérifiant le même type de relations de récurrence.

## II.

| |
|---|
| $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ sont des réels donnés.<br><br>$(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :<br>• leurs premiers termes $u_0$ et $v_0$ ;<br>• les relations de récurrences $\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n + e \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n + f \end{cases}$. |

On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel $n$, on pose $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ (matrice colonne).

On vérifie immédiatement que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n + \mathrm{B}}$ (relation de récurrence).

On suppose qu'il existe une matrice colonne S à 2 lignes telle que $\mathrm{S} = \mathrm{AS} + \mathrm{B}$.

Pour tout entier naturel $n$, on pose $\mathrm{U}_n = \mathrm{X}_n - \mathrm{S}$.

On vérifie que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n \mathrm{U}_0$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n \left(\mathrm{X}_0 - \mathrm{S}\right) + \mathrm{S}$.