1$^{\text{ère}}$ S1 — Devoir pour le vendredi 24 mars 2017

Soit x un réel fixé.

1°) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \cos(x+k\pi)$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{k=n} \sin(x+k\pi)$.

Déterminer une expression simplifiée de S_n et S'_n.

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} \cos^2(x+k\pi)$ et $T'_n = \sum_{k=0}^{k=n} \sin^2(x+k\pi)$.

Déterminer une expression simplifiée de T_n et T'_n.

Corrigé

1°) On commence par déterminer une expression simplifiée de $\cos(x+k\pi)$ et $\sin(x+k\pi)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

On distingue deux cas.

1^er^ cas : k est pair.

Dans ce cas, on peut écrire $k = 2l$ où l est un entier naturel.
On a alors $\cos(x+k\pi) = \cos(x+2l\pi) = \cos x$ et $\sin(x+k\pi) = \sin(x+2l\pi) = \sin x$ (propriété du cosinus et du sinus).

2^e^ cas : k est impair.
Dans ce cas, on peut écrire $k = 2l+1$ où l est un entier naturel.
On a alors $\cos(x+k\pi) = \cos(x+(2l+1)\pi) = \cos(x+\pi+2l\pi) = \cos(x+\pi) = -\cos x$ et $\sin(x+k\pi) = -\sin x$ de la même manière.

On peut rassembler les deux cas en une seule formule chaque fois (une pour le cosinus, une pour le sinus) :

$\cos(x+k\pi) = (-1)^k \cos x$ et $\sin(x+k\pi) = (-1)^k \sin x$ puisque $(-1)^k = 1$ si k est pair et $(-1)^k = -1$ si k est impair.

Il est conseillé de connaître ces formules qui restent valable si k est un entier relatif.

On peut obtenir cette formule d'une autre manière grâce aux formules d'addition du cosinus et du sinus qui seront étudiées plus tard : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

Par exemple, pour $\cos(x+k\pi)$, on procède ainsi :

$$\begin{aligned}\cos(x+k\pi) &= \cos x \cos(k\pi) + \sin x \sin(k\pi) \\ &= \cos x \times (-1)^k - \sin x \times 0 \quad \text{car } \cos(k\pi) = (-1)^k \text{ et } \sin(k\pi) = 0\end{aligned}$$

On peut écrire les sommes S_n et S'_n sous forme développée :

$S_n = \cos x - \cos x + \cos x - \cos x + ... + (-1)^n \cos x$ et $S'_n = \sin x - \sin x + \sin x - \sin x + ... + (-1)^n \sin x$.

Les termes s'annulent deux à deux (il s'agit de sommes « télescopiques »).

On distingue deux cas suivant la parité de n.

- Si n est pair, alors $S_n = \cos x$ et $S'_n = \sin x$.

- Si n est impair, alors $S_n = 0$ et $S'_n = 0$.

Autre version (à étudier) :

On utilise les égalités $\cos(x+k\pi)=(-1)^k\cos x$ et $\sin(x+k\pi)=(-1)^k\sin x$.

On peut alors réécrire S_n et S'_n sous la forme suivante :

$$S_n=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\cos x \quad \text{et} \quad S'_n=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\sin x$$

On peut « sortir » $\cos x$ et $\sin x$ puisque ce sont des nombres qui ne dépendent pas de *k*.

$$S_n=\cos x\left(\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\right) \quad \text{et} \quad S'_n=\sin x\left(\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\right)$$

On doit maintenant déterminer une expression simplifiée de $\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k$.

On peut écrire la somme sous forme développée : $\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k=1-1+1-1+\ldots+(-1)^n$.

Les termes s'annulent deux à deux.

Si n est pair, alors $\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k=1$.	Si n est impair, alors $\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k=0$.

Conclusion :

Si n est pair, alors $S_n=\cos x$ et $S'_n=\sin x$.	Si n est impair, alors $S_n=0$ et $S'_n=0$.

2°)

On reprend ce qui a été fait à la question 1°).

$$\begin{aligned}\forall k\in\mathbb{N}\quad \cos^2(x+k\pi)&=\left[\cos(x+k\pi)\right]^2\\&=\left[(-1)^k\cos x\right]^2\\&=\cos^2 x\end{aligned}$$

De même, $\forall k\in\mathbb{N}\quad \sin^2(x+k\pi)=\sin^2 x$

À l'aide de ces résultats, on détermine expression simplifiée de T_n et T'_n.

$$T_n = \sum_{k=0}^{k=n} \cos^2(x + k\pi)$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \cos^2 x$$

$$= (n+1)\cos^2 x$$

De même, $T'_n = (n+1)\sin^2 x$.