1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du vendredi 2 juin 2017 (50 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (4 points)

Soit x un réel quelconque. On pose $\mathrm{E} = \cos x \times \left(\cos x - 2\sin x\right) - \sin x \times \left(2\cos x + \sin x\right)$.

Démontrer que pour tout réel x on a $\mathrm{E} = a\cos 2x + b\sin 2x$ où a et b sont deux réels à déterminer.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

II. (3 points : 1°) 1 point + 1 point ; 2°) 1 point)

Soit α un réel tel que $\sin \alpha = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

1°) Calculer $\cos 2\alpha$ et $\cos 4\alpha$.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

2°) On précise que $\alpha \in \left[-\pi\,;-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième de α.

…………………………….. (un seul résultat, sans égalité)

III. (2 points : 1 point + 1 point)

Calculer le cosinus et le sinus de $\dfrac{7\pi}{12}$ (valeurs exactes).

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Pour tout réel x, on pose $\mathrm{A}=2\cos x(\cos x-\sin x)$ et $\mathrm{B}=1+\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

1°) Démontrer que pour tout réel x on a : $\mathrm{A}=1+\cos 2x-\sin 2x$.
2°) En déduire que pour tout réel x on a : $\mathrm{A}=\mathrm{B}$.

……

……

……

……

……

……

……

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit ABC un triangle rectangle en A. On pose $\mathrm{AB}=2a$ où a est un réel strictement positif et on note α la mesure en radians de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$.
Soit I le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

1°) Exprimer l'aire du triangle AIB en utilisant le cosinus ou le sinus de 2α.

……

……

……

……

……

……

……

2°) Le cercle Γ de centre B passant par I coupe le segment $[\mathrm{AB}]$ en un point J. Soit K le projeté orthogonal de J sur la droite (AI). Démontrer que $\mathrm{AK}=2a\sin\alpha-a\sin 2\alpha$.

……

……

……

……

……

……

……

VI. (2 points : 1 point + 1 point)

On pose $I=[-\pi\,;\,\pi]$.
On considère l'équation $1-2\cos x=0$ (1) et l'inéquation $1-2\cos x>0$ (2) d'inconnue $x\in I$.
En utilisant le cercle trigonométrique, compléter les phrases suivantes :

- L'ensemble des solutions de (1) dans I est ……………………..…………..…….. .

- L'ensemble des solutions de (2) dans I est ……………………..…………..…….. .

VII. (1 point)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{5}{x^2+1}=2$ (1).
On attend une rédaction à l'aide du symbole d'équivalence.

……

……

……

……

Corrigé du contrôle du 2-6-2017

I.

Soit x un réel quelconque. On pose $\text{E}=\cos x\times\left(\cos x-2\sin x\right)-\sin x\times\left(2\cos x+\sin x\right)$.
Démontrer que pour tout réel x on a $\text{E}=a\cos 2x+b\sin 2x$ où a et b sont deux réels à déterminer.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \text{E}=\cos x\times\left(\cos x-2\sin x\right)-\sin x\times\left(2\cos x+\sin x\right)$$

$$=\cos^2 x-2\sin x\times\cos x-2\sin x\times\cos x-\sin^2 x$$

$$=\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)-4\sin x\times\cos x$$

$$=\cos 2x-2\sin 2x$$

II.

Soit α un réel tel que $\sin\alpha=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

1°) Calculer $\cos 2\alpha$ et $\cos 4\alpha$.

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

$$=1-2\times\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2$$

$$=1-\cancel{2}\times\left(-\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{3}}\right)\times\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$=1-\frac{1}{6}$$

$$=\frac{5}{6}$$

$$\cos 4\alpha=2\cos^2 2\alpha-1$$

$$=2\times\left(\frac{5}{6}\right)^2-1$$

$$=\frac{25}{18}-1$$

$$=\frac{7}{18}$$

2°) On précise que $\alpha\in\left[-\pi\,;-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième de α.

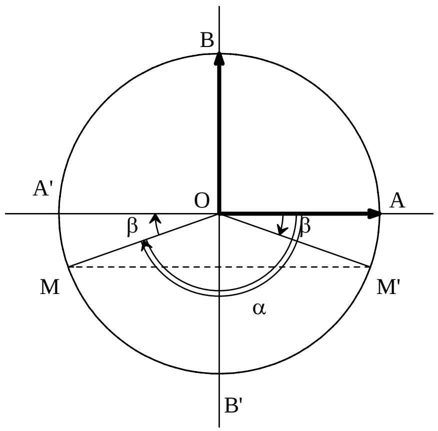
$-2{,}849$ (un seul résultat, sans égalité)

La commande $\cos^{-1}$ de la calculatrice mise en mode radians fournit une valeur approchée du réel $\beta\in\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\beta=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. On peut écrire $\beta=\text{Arcsin}\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)$.

Une figure avec un cercle trigonométrique fait aisément apparaître que $\alpha=-\pi-\beta$.

Pour cela, on raisonne avec les angles géométriques : $\widehat{\text{AOM}}=-\beta$ et $\widehat{\text{AOM'}}=\pi+\beta$.

En tapant directement l'expression sur la calculatrice, on obtient $\alpha=-2{,}84874988\ldots$.



III.

Calculer le cosinus et le sinus de $\dfrac{7\pi}{12}$ (valeurs exactes).

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\cos\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\times\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sin\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\times\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

- On peut vérifier ces valeurs grâce à la calculatrice (modèle TI-83 CE Premium).
- La troisième ligne dans laquelle on utilise des valeurs remarquables est indispensable.

IV.

Pour tout réel x, on pose $\mathrm{A}=2\cos x(\cos x-\sin x)$ et $\mathrm{B}=1+\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

1°) Démontrer que pour tout réel x on a : $\mathrm{A}=1+\cos 2x-\sin 2x$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{A}=2\cos^2 x-2\cos x\sin x$

$\qquad =1+\cos 2x-\sin 2x$ (formule $2\cos^2 x=1+\cos 2x$)

2°) En déduire que pour tout réel x on a : $\mathrm{A}=\mathrm{B}$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{B}=1+\sqrt{2}\left(\cos 2x\times\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin 2x\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (formule d'addition du cosinus)

$\qquad =1+\cos 2x-\sin 2x$

$\qquad =\mathrm{A}$ (d'après le résultat de la question précédente)

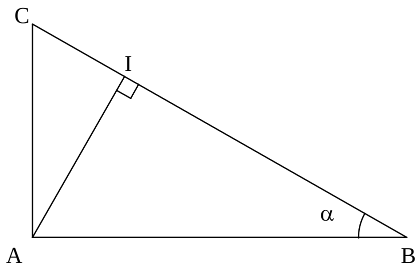
On en déduit que $\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{A}=\mathrm{B}$.

V.

Soit ABC un triangle rectangle en A. On pose $\mathrm{AB}=2a$ où a est un réel strictement positif et on note α la mesure en radians de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$.
Soit I le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

1°) Exprimer l'aire du triangle AIB en utilisant le cosinus ou le sinus de 2α.

On commence par faire une figure (disposition : (AB) horizontale, A à gauche de B, C au-dessus de (AB)).



Le triangle AIB est rectangle en I donc $\mathcal{A}_{\mathrm{AIB}}=\frac{\mathrm{IA}\times\mathrm{IB}}{2}$.

On a : $\mathrm{IA}=2a\sin\alpha$ et $\mathrm{IB}=2a\cos\alpha$.

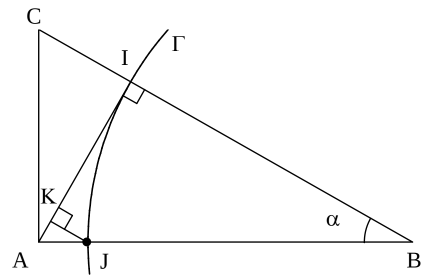
Par conséquent

$\mathcal{A}_{\mathrm{AIB}}=\frac{\cancel{2}a\sin\alpha\times 2a\cos\alpha}{\cancel{2}}$

$\qquad =2a^2\sin\alpha\times\cos\alpha$

$\qquad =a^2\sin 2\alpha$

2°) Le cercle Γ de centre B passant par I coupe le segment $[\mathrm{AB}]$ en un point J. Soit K le projeté orthogonal de J sur la droite (AI). Démontrer que $\mathrm{AK}=2a\sin\alpha-a\sin 2\alpha$.



On commence par écrire : $\mathrm{AK}=\mathrm{AJ}\sin\alpha$ (1) (relation trigonométrique dans le triangle AJK rectangle en K : $\sin\alpha=\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AJ}}$ qui donne $\mathrm{AK}=\mathrm{AJ}\times\sin\alpha$).

Comme $\mathrm{J}\in[\mathrm{AB}]$, on a : $\mathrm{AJ}=\mathrm{AB}-\mathrm{BJ}$.

Or $[\mathrm{BI}]$ et $[\mathrm{BJ}]$ sont deux rayons du cercle Γ donc $\mathrm{BJ}=\mathrm{BI}=2a\cos\alpha$.

On a donc $\mathrm{AJ}=2a-2a\cos\alpha$.

(1) donne alors :

$\mathrm{AK}=(2a-2a\cos\alpha)\sin\alpha$

$\qquad =2a\sin\alpha-2a\cos\alpha\sin\alpha$

$\qquad =2a\sin\alpha-a\sin 2\alpha$

VI.

On pose $I=[-\pi\,;\,\pi]$.

On considère l'équation $1-2\cos x=0$ (1) et l'inéquation $1-2\cos x>0$ (2) d'inconnue $x\in I$.

En utilisant le cercle trigonométrique, compléter les phrases suivantes :

- L'ensemble des solutions de (1) dans I est $\left\{-\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{\pi}{3}\right\}$.

- L'ensemble des solutions de (2) dans I est $\left[-\pi\,;\,-\dfrac{\pi}{3}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{3}\,;\,\pi\right]$.

$(2)\Leftrightarrow\cos x<\dfrac{1}{2}$

VII.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{5}{x^2+1}=2$ (1).

On attend une rédaction à l'aide du symbole d'équivalence.

On résout (1) dans $\mathbb{R}$.

$(1)\Leftrightarrow 5=2\left(x^2+1\right)$

$\Leftrightarrow 5=2x^2+2$

$\Leftrightarrow x^2=\dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ ou $x=-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

Soit S l'ensemble de solutions de (1).

$S=\left\{\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,;\,-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right\}$