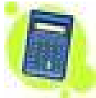
TS1

Contrôle du lundi 22 mai 2017 (50 min)



Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Cet exercice est constitué de questions de cours. Pour les questions 2°) et 3°), seules les réponses correctement justifiées seront prises en compte.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif).

1°) Compléter la phrase :

La densité de X est la fonction *f* définie sur l'intervalle …………….. par $f(x)=$........................ .

2°) Soit x un réel positif ou nul quelconque.
Déterminer l'expression de $P(\mathrm{X}\geqslant x)$ en fonction de x et de λ sous la forme la plus simple possible.
On présentera toutes les étapes de calculs.

…….

…….

…….

…….

…….

3°) Soit x et a deux réels positifs ou nuls quelconques.
Démontrer par le calcul que $P(\mathrm{X}\geqslant x+a\,/\,\mathrm{X}\geqslant x)=P(\mathrm{X}\geqslant a)$.

…….

…….

…….

…….

…….

II. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

La durée de vie T (exprimée en années) d'un appareil électronique suit la loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif). On sait qu'un tel appareil a une durée de vie moyenne de quatre ans.

1°) Calculer la valeur de λ.

…………………………… (une seule égalité)

2°) Quelle est la probabilité qu'un appareil fonctionne deux années de plus sachant qu'il a déjà fonctionné trois ans ?
On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième du résultat.

…….

…….

…….

…….

…….

…….

…….

III. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Un astronome responsable d'un club d'astronomie a observé le ciel un soir d'août 2016 pour voir des étoiles filantes. Il a effectué des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes. Il a alors modélisé ce temps d'attente, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
En exploitant les données obtenues, il a établi que $\lambda=0,2$. Il prévoit d'emmener un groupe de nouveaux adhérents de son club lors du mois d'août 2017 pour observer des étoiles filantes. Il suppose qu'il sera dans des conditions d'observation analogues à celles d'août 2016. L'astronome veut s'assurer que le groupe ne s'ennuiera pas et décide de faire quelques calculs de probabilités dont les résultats serviront à animer la discussion.

1°) Lorsque le groupe voit une étoile filante, calculer la probabilité qu'il attende moins de 3 minutes pour voir l'étoile filante suivante. Arrondir le résultat au millième.

…………………… (un seul résultat sans égalité)

2°) Lorsque le groupe voit une étoile filante, quelle durée minimale doit-il attendre pour voir la suivante avec une probabilité supérieure à 0,95 ? Arrondir ce temps à la minute près.

…………………… (un seul résultat sans égalité)

IV. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Une entreprise fabrique des appareils électroniques dont la durée de vie en mois est modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu=48$ et d'écart-type $\sigma=10$.

On donnera la valeur arrondie au millième des probabilités demandées.

1°) On prélève un appareil au hasard dans la production.
Quelle est la probabilité qu'il fonctionne plus de 3 ans ?

…………………… (un seul résultat sans égalité)

2°) On sait qu'un appareil a fonctionné plus de 3 ans.
Quelle est la probabilité qu'il fonctionne moins de 5 ans ?
On détaillera brièvement la démarche sur les lignes qui suivent en faisant attention aux notations employées.

…………………… (un seul résultat sans égalité)

………..

………..

………..

………..

V. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle par une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance $\mu = 84$ et d'écart-type σ. De plus, on a $P(X \leqslant 64) = 0{,}16$.

1°) On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{X-84}{\sigma}$.

a) Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ? Répondre avec précision par une phrase sans justifier.

………..

………..

2°) On note F la fonction de répartition de Z. Soit *u* le réel dont l'image par F est égale à 0,16.
Exprimer σ en fonction *u* puis donner la valeur arrondie au millième de σ.
On détaillera la démarche sur les lignes qui suivent.

…………………………………… (une seule égalité) ……………………… (un seul résultat sans égalité)

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

VI. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Dans un pays, la taille en centimètres des femmes de 18 à 65 ans peut être modélisée par une variable aléatoire X_1 suivant la loi normale d'espérance $\mu_1 = 165$ et d'écart-type $\sigma_1 = 6$ et celle des hommes de 18 à 65 ans, par une variable aléatoire X_2 suivant la loi normale d'espérance $\mu_2 = 175$ et d'écart-type $\sigma_2 = 11$.
On donnera les valeurs arrondies au millième des probabilités demandées.

1°) On sait que dans ce pays les femmes représentent 52 % de la population des personnes dont l'âge est compris entre 18 et 65 ans. On choisit au hasard une personne qui a entre 18 et 65 ans.
Quelle est la probabilité qu'elle mesure plus de 1,70 m ?

…………………… (un seul résultat sans égalité)

2°) On choisit au hasard une personne qui a entre 18 et 65 ans. On constate qu'elle mesure plus de 1,70 m.
Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?

…………………… (un seul résultat sans égalité)

Corrigé du contrôle du 22-5-2017

I.

Cet exercice est constitué de questions de cours. Pour les questions 2°) et 3°), seules les réponses correctement justifiées seront prises en compte.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif).

1°) Compléter la phrase :

La densité de X est la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

2°) Soit x un réel positif ou nul quelconque.
Déterminer l'expression de $P(\mathrm{X}\geqslant x)$ en fonction de x et de λ sous la forme la plus simple possible.
On présentera toutes les étapes de calculs.

$$P(\mathrm{X}\geqslant x)=1-P(\mathrm{X}\leqslant x)$$

$$=1-P(0\leqslant \mathrm{X}\leqslant x) \qquad \text{(en effet, } P(\mathrm{X}\leqslant x)=P(0\leqslant \mathrm{X}\leqslant x)\text{)}$$

$$=1-\int_0^x \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

$$=1-\left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x$$

$$=1+\left[\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x$$

$$=\cancel{1}+\mathrm{e}^{-\lambda x}\cancel{-1}$$

$$=\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

3°) Soit x et a deux réels positifs ou nuls quelconques.
Démontrer par le calcul que $P(\mathrm{X}\geqslant x+a\,/\,\mathrm{X}\geqslant x)=P(\mathrm{X}\geqslant a)$.

$$P(\mathrm{X}\geqslant x+a\,/\,\mathrm{X}\geqslant x)=\frac{P\big((\mathrm{X}\geqslant x+a)\cap(\mathrm{X}\geqslant x)\big)}{P(\mathrm{X}\geqslant x)}$$

$$=\frac{P(\mathrm{X}\geqslant x+a)}{P(\mathrm{X}\geqslant x)} \qquad \text{(car } x+a\geqslant x \text{ car } a\geqslant 0\text{)}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(x+a)}}{\mathrm{e}^{-\lambda x}} \qquad \text{(on utilise le résultat démontré à la question 2°))}$$

$$=\mathrm{e}^{\lambda x-\lambda(x+a)}$$

$$=\mathrm{e}^{-\lambda a}$$

$$=P(\mathrm{X}\geqslant a)$$

II.

La durée de vie T (exprimée en années) d'un appareil électronique suit la loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif). On sait qu'un tel appareil a une durée de vie moyenne de quatre ans.

1°) Calculer la valeur de λ.

$$\lambda=\frac{1}{4} \text{ (une seule égalité)}$$

On sait que $\mathrm{E}(\mathrm{T})=\dfrac{1}{\lambda}$ (formule du cours sur l'espérance d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle).
On sait également que la moyenne correspond à l'espérance.
On a donc $\dfrac{1}{\lambda}=4$ d'où $\lambda=\dfrac{1}{4}$.

2°) Quelle est la probabilité qu'un appareil fonctionne deux années de plus sachant qu'il a déjà fonctionné trois ans ?
On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième du résultat.

La probabilité qu'un appareil fonctionne deux années de plus sachant qu'il a déjà fonctionné trois ans est $P(\mathrm{T}\geqslant 5\,/\,\mathrm{T}\geqslant 3)$.

$$P(\mathrm{T}\geqslant 5\,/\,\mathrm{T}\geqslant 3)=P(\mathrm{T}\geqslant 3+2\,/\,\mathrm{T}\geqslant 3)$$

$$=P(\mathrm{T}\geqslant 2) \qquad \text{(propriété de durée de vie sans vieillissement redémontrée dans le I. 3°))}$$

$$=\mathrm{e}^{-2\times\frac{1}{4}}$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

Sur la calculatrice, on obtient l'affichage 0,60653065971.

La valeur arrondie au dixième de la probabilité cherchée est 0,607.

On peut aussi écrire $P(\mathrm{T} \geqslant 5 / \mathrm{T} \geqslant 3) = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

III.

Un astronome responsable d'un club d'astronomie a observé le ciel un soir d'août 2016 pour voir des étoiles filantes. Il a effectué des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes. Il a alors modélisé ce temps d'attente, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
En exploitant les données obtenues, il a établi que $\lambda = 0,2$. Il prévoit d'emmener un groupe de nouveaux adhérents de son club lors du mois d'août 2017 pour observer des étoiles filantes. Il suppose qu'il sera dans des conditions d'observation analogues à celles d'août 2016. L'astronome veut s'assurer que le groupe ne s'ennuiera pas et décide de faire quelques calculs de probabilités dont les résultats serviront à animer la discussion.

1°) Lorsque le groupe voit une étoile filante, calculer la probabilité qu'il attende moins de 3 minutes pour voir l'étoile filante suivante. Arrondir le résultat au millième.

0,451 (un seul résultat sans égalité)

$$P(\mathrm{T} < 3) = \int_0^3 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t$$

$$= \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t} \right]_0^3$$

$$= 1 - \mathrm{e}^{-3\lambda}$$

$$= 1 - \mathrm{e}^{-0,6}$$

D'après la calculatrice, $P(\mathrm{T} < 3) = 0,4511883\ldots$.

La valeur arrondie au millième de $P(\mathrm{T} < 3)$ est donc 0,451.

2°) Lorsque le groupe voit une étoile filante, quelle durée minimale doit-il attendre pour voir la suivante avec une probabilité supérieure à 0,95 ? Arrondir ce temps à la minute près.

15 minutes (un seul résultat sans égalité)

On cherche $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $P(\mathrm{T} < x) > 0,95 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-0,2x} > 0,95$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,2x} < 0,05$

$\Leftrightarrow -0,2x < \ln 0,05$

$\Leftrightarrow x > -\dfrac{\ln 0,05}{0,2}$ (division de chacun des deux membres par – 0,2 qui est négatif)

Avec la calculatrice, on trouve $-\dfrac{\ln 0,05}{0,2} = 14,978661367\ldots$.

La valeur demandée est 15 minutes (un quart d'heures).

IV.

Une entreprise fabrique des appareils électroniques dont la durée de vie en mois est modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 48$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

On donnera la valeur arrondie au millième des probabilités demandées.

1°) On prélève un appareil au hasard dans la production.
Quelle est la probabilité qu'il fonctionne plus de 3 ans ?

0,885 (un seul résultat sans égalité)

Attention, X désigne la durée de vie en mois.
On cherche donc $P(\mathrm{X} > 36)$.

Pour la calculatrice, il est préférable d'écrire : $P(\mathrm{X} > 36) = P(36 < \mathrm{X} < 48) + P(\mathrm{X} \geqslant 0,48)$ soit
$P(\mathrm{X} > 36) = P(36 < \mathrm{X} < 48) + 0,5$.

On trouve $P(\mathrm{X} > 36) = 0,884930268942\ldots$.

La valeur arrondie au millième de la probabilité cherchée est donc 0,885.

2°) On sait qu'un appareil a fonctionné plus de 3 ans.
Quelle est la probabilité qu'il fonctionne moins de 5 ans ?
On détaillera brièvement la démarche sur les lignes qui suivent en faisant attention aux notations employées.

0,870 (un seul résultat sans égalité)

$$P(\mathrm{X} < 60 / \mathrm{X} > 36) = \frac{P(36 < \mathrm{X} < 60)}{P(\mathrm{X} > 36)}$$

Pour la calculatrice, il est préférable d'écrire : $P(\mathrm{X} < 60 / \mathrm{X} > 36) = \dfrac{P(36 < \mathrm{X} < 60)}{0,5 + P(36 < \mathrm{X} < 48)}$.

Avec la calculatrice, on trouve $P(\mathrm{X} < 60 / \mathrm{X} > 36) = 0,8699674582\ldots$.

V.

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle par une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance $\mu = 84$ et d'écart-type σ. De plus, on a $P(\mathrm{X} \leqslant 64) = 0,16$.

1°) On note Z la variable aléatoire définie par $\mathrm{Z} = \dfrac{\mathrm{X} - 84}{\sigma}$.

a) Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ? Répondre avec précision par une phrase sans justifier.

Z suit la loi normale centrée réduite (propriété du cours).

2°) On note F la fonction de répartition de Z. Soit u le réel dont l'image par F est égale à 0,16.
Exprimer σ en fonction u puis donner la valeur arrondie au millième de σ.
On détaillera la démarche sur les lignes qui suivent.

$\sigma = -\dfrac{20}{u}$ (une seule égalité) 20,111 (un seul résultat sans égalité)

$$\mathrm{X} \leqslant 64 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{X}-84}{\sigma} \leqslant -\frac{20}{\sigma} \quad (\text{car } \sigma > 0)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Z} \leqslant -\frac{20}{\sigma}$$

On a $P(\mathrm{X} \leqslant 64) = 0{,}16$ donc $P\left(\mathrm{Z} \leqslant -\dfrac{20}{\sigma}\right) = 0{,}16$ soit $\mathrm{F}\left(-\dfrac{20}{\sigma}\right) = 0{,}16$.

Or $\mathrm{F}(u) = 0{,}16$ d'où $-\dfrac{20}{\sigma} = u$.

Par conséquent, $\sigma = -\dfrac{20}{u}$.

Sur la calculatrice, on tape directement – 20/FracNormale(0.16 .

On obtient $\sigma = 20{,}111459908...$.

La valeur arrondie au millième de σ est 20,111.

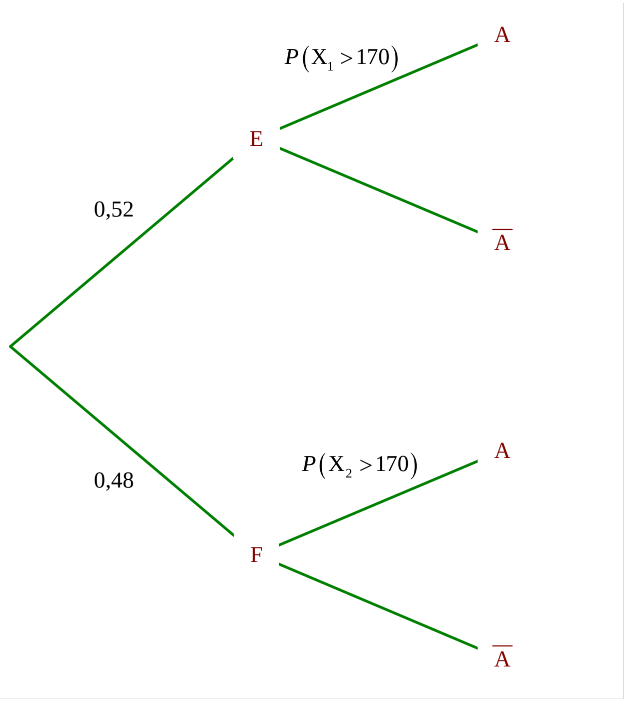
VI.

Dans un pays, la taille en centimètres des femmes de 18 à 65 ans peut être modélisée par une variable aléatoire X_1 suivant la loi normale d'espérance $\mu_1 = 165$ et d'écart-type $\sigma_1 = 6$ et celle des hommes de 18 à 65 ans, par une variable aléatoire X_2 suivant la loi normale d'espérance $\mu_2 = 175$ et d'écart-type $\sigma_2 = 11$.
On donnera les valeurs arrondies au millième des probabilités demandées.

1°) On sait que dans ce pays les femmes représentent 52 % de la population des personnes dont l'âge est compris entre 18 et 65 ans. On choisit au hasard une personne qui a entre 18 et 65 ans.
Quelle est la probabilité qu'elle mesure plus de 1,70 m ?

0,429 (un seul résultat sans égalité)

On considère les événements :
E : « la personne est une femme » ; F : « la personne est un homme » ; A : « la personne mesure plus de 1,70 m ».



On sait alors, d'après l'énoncé, que : $P(\mathrm{E}) = 0{,}52$; $P(\mathrm{F}) = 0{,}48$; $P(\mathrm{A/E}) = P(\mathrm{X}_1 > 170)$; $P(\mathrm{A/F}) = P(\mathrm{X}_2 > 170)$.

E et F constituent un système complet d'événements.

Donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{A}) &= P(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}) + P(\mathrm{A} \cap \mathrm{F}) \\ &= 0{,}52 \times P(\mathrm{X}_1 > 170) + 0{,}48 \times P(\mathrm{X}_2 > 170) \end{aligned}$$

Pour utiliser la calculatrice, on a intérêt à écrire :

$$P(\mathrm{A}) = 0{,}52 \times \big(0{,}5 - P(165 < \mathrm{X}_1 < 170)\big) + 0{,}48 \times \big(0{,}5 + P(170 < \mathrm{X}_2 < 175)\big)$$

$$= 0{,}52 \times \big(0{,}5 - P(165 < \mathrm{X}_1 < 170)\big) + 0{,}48 \times \big(0{,}5 + P(170 < \mathrm{X}_2 < 175)\big)$$

$$= 0{,}5 - 0{,}52 \times P(165 < \mathrm{X}_1 < 170) + 0{,}48 \times P(170 < \mathrm{X}_2 < 175)$$

On tape d'un coup toute l'expression sur la calculatrice.

Avec la calculatrice, on trouve : $P(\mathrm{A}) = 0{,}42934601253...$.

La valeur arrondie au millième de $P(\mathrm{A})$ est 0,429.

2°) On choisit au hasard une personne qui a entre 18 et 65 ans. On constate qu'elle mesure plus de 1,70 m.
Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?

0,245 (un seul résultat sans égalité)

Par définition, on a : $P(\mathrm{E}/\mathrm{A})=\dfrac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{E})}{P(\mathrm{A})}$.

Par conséquent, $P(\mathrm{E}/\mathrm{A})=\dfrac{0,52\times P(\mathrm{X}_1>170)}{0,52\times P(\mathrm{X}_1>170)+0,48\times P(\mathrm{X}_2>170)}$.

Pour la calculatrice, on a intérêt à écrire $P(\mathrm{E}/\mathrm{A})=\dfrac{0,52\times\left[0,5-P(165<\mathrm{X}_1<170)\right]}{0,5-0,52\times P(165<\mathrm{X}_1<170)+0,48\times P(170<\mathrm{X}_2<175)}$.

On tape cette expression d'un coup.

On trouve $P(\mathrm{E}/\mathrm{A})=0,24504880908...$

La valeur arrondie au millième de $P(\mathrm{E}/\mathrm{A})$ est 0,245.