1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 23 mai 2017 (50 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Une machine propose diverses boissons dont du café. Chaque semaine, 38 % des boissons distribuées sont des cafés. On considère que la proportion théorique de consommation de café sur cette machine est $p = 0,38$. La personne qui entretient la machine décide de changer la marque du café.

1°) En utilisant la valeur $p = 0,38$, déterminer à l'aide de la loi binomiale un intervalle de fluctuation au seuil approximatif de 95 % de la fréquence de cafés dans un échantillon aléatoire de 400 boissons consommées. Aucun détail de la démarche n'est demandé.

Donner les bornes sous la forme $\dfrac{a}{400}$ et $\dfrac{b}{400}$ où a et b sont des entiers naturels.

…………………………….. (une seule réponse sans égalité et sans faire de phrase)

2°) Dans la semaine qui suit le changement, on constate que, sur 400 boissons consommées, 44 % sont des cafés.
Peut-on considérer que la proportion de consommation de café est restée stable ?
Répondre en utilisant le résultat de la question 1°).

………

………

………

………

II. (11 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 2 points ; 5°) a) 2 points ; b) 1 point par réponse)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les points $\mathrm{A}(1\,;0)$, $\mathrm{B}(0\,;1)$ et $\mathrm{C}(1\,;1)$.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x+1}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Vérifier brièvement que la courbe $\mathcal{C}$ passe par les points O et C.

………

………

1°) Justifier que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$.

………

………

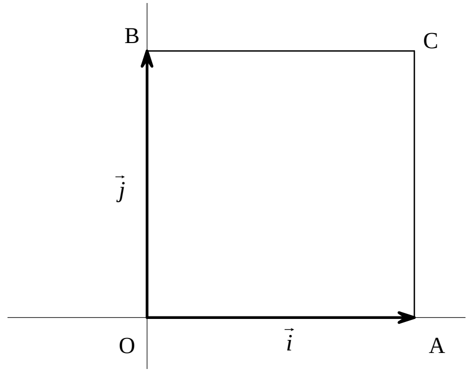
………

………

………

………

2°) Tracer avec soin et précision l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{OC}}$ de la courbe $\mathcal{C}$ sur le graphique ci-dessous.



3°) Le carré OACB sert de cible à un jeu de fléchettes. L'arc $\overset{\frown}{\mathrm{OC}}$ de la courbe $\mathcal{C}$ partage la cible en deux domaines.
On note Z le domaine compris entre l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{OC}}$ et l'axe des abscisses.
On précise que l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{OC}}$, ainsi que les segments $[\mathrm{OA}]$ et $[\mathrm{AC}]$ font partie du domaine.

Hachurer le domaine Z sur le graphique précédent.

Tracer la courbe $\mathcal{C}$ sur l'écran de la calculatrice (en prenant une fenêtre graphique convenable : par exemple $x \in [-0,2\,;1,2]$ et $y \in [-0,2\,;1,2]$) puis, à l'aide de la commande de la calculatrice permettant de calculer l'aire sous la courbe représentative d'une fonction positive (faire $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{trace}}$ (calculs), choisir 7, puis rentrer 0 comme borne inférieure et 1 comme borne supérieure, appuyer une fois sur $\boxed{\text{entrer}}$; une valeur approchée s'affiche en bas de l'écran), déterminer la valeur arrondie au millième de l'aire de Z.

………………………… (un seul résultat, sans égalité)

4°) On admet que la valeur exacte de l'aire de Z est égale à $2 - 2\ln 2$ où ln 2 désigne le logarithme népérien de 2.

La fonction logarithme népérien, notée ln, est une fonction qu'on ne connaît pas en première. Elle sera étudiée en détail l'année prochaine et correspond à la touche $\boxed{\ln}$ de la calculatrice (sur le côté, tout à fait à gauche, troisième touche en partant du bas). La fonction logarithme népérien ne possède pas d'expression algébrique.

Un joueur lance 200 fléchettes. On suppose qu'il atteint chaque fois la cible.
Déterminer à l'aide de la loi binomiale un intervalle de fluctuation au seuil approximatif de 95 % de la fréquence de lancers qui atteignent la zone *Z*. Donner les bornes sous forme fractionnaire.

…………………………………… (répondre sans faire de phrase, sans égalité)

Calculer l'amplitude de cet intervalle. Donner le résultat sans écrire d'égalité.

…………………

5°) a) Écrire un système de deux doubles inéquations qui caractérise l'intérieur du carré OACB et un système de deux doubles inéquations qui caractérise *Z*.

$$\text{OACB}\begin{cases}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases} \qquad\qquad Z\begin{cases}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

b) On désire réaliser un algorithme permettant de simuler n lancers, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1 saisi en entrée. Pour chaque lancer, on note $(x\,;\,y)$ les coordonnées du point d'impact.
L'algorithme affiche en sortie la fréquence de lancers pour lesquels la zone *Z* est atteinte.
Compléter l'algorithme suivant :

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
a prend la valeur 0

Traitement :
Pour i allant de 1 à n **Faire**
  x prend la valeur d'un réel aléatoire dans l'intervalle $[0\,;1]$
  y prend la valeur d'un réel aléatoire dans l'intervalle $[0\,;1]$
  z prend la valeur $\dfrac{2x}{x+1}$
  Si y …………
    Alors a prend la valeur …………
  FinSi
FinPour

Sortie :
Afficher ……

Bonus sur 1 point (à ne traiter à la fin que si tout le reste a été fait et s'il reste du temps) :

Réaliser le programme sur calculatrice puis le faire tourner 5 fois pour $n=100$.
Écrire l'échantillon de taille 5 obtenu (c'est-à-dire donner la liste des 5 fréquences obtenues).

………

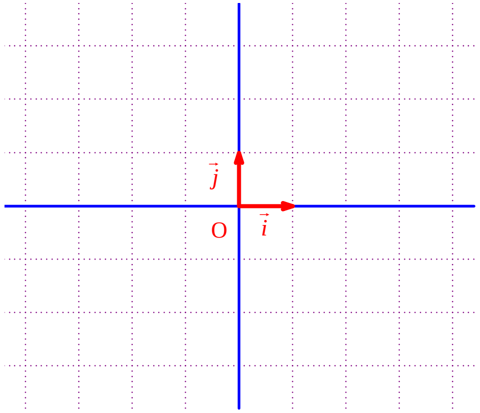
III. (2 points : 1 point + 1 point)

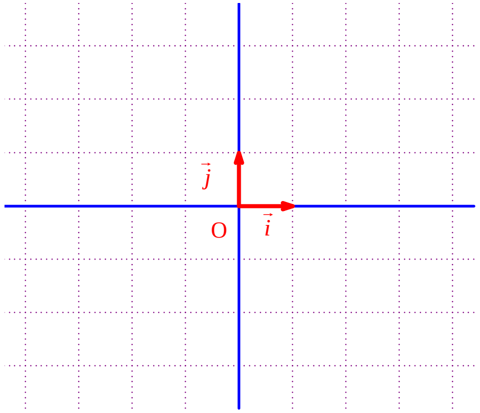
Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Sur le graphique de gauche, hachurer l'ensemble *E* des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que $xy \geqslant 0$.

Sur le graphique de droite, hachurer l'ensemble *F* des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que $x^2+y^2 \leqslant 4$.

Il n'y a pas de valeurs à écrire sur les graphiques.





IV. (3 points)

Soit a un réel strictement positif donné.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3-ax=0 \quad (1)$.

On exprimera les solutions en fonction de a. On attend une rédaction à l'aide du symbole d'équivalence.

………

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 23-5-2017

I.

Une machine propose diverses boissons dont du café. Chaque semaine, 38 % des boissons distribuées sont des cafés. On considère que la proportion théorique de consommation de café sur cette machine est $p=0,38$. La personne qui entretient la machine décide de changer la marque du café.

1°) En utilisant la valeur $p=0,38$, déterminer à l'aide de la loi binomiale un intervalle de fluctuation au seuil approximatif de 95 % de la fréquence de cafés dans un échantillon aléatoire de 400 boissons consommées. Aucun détail de la démarche n'est demandé.

Donner les bornes sous la forme $\dfrac{a}{400}$ et $\dfrac{b}{400}$ où a et b sont des entiers naturels.

$\left[\dfrac{133}{400};\dfrac{171}{400}\right]$ (une seule réponse sans égalité et sans faire de phrase)

1ère méthode :

On note T une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n=400$ et $p=0,38$.

On cherche :

- le plus petit entier naturel a tel que $P(\mathrm{T}\leqslant a)>0,025$;
- le plus petit entier naturel b tel que $P(\mathrm{T}\leqslant b)\geqslant 0,975$.

Autre manière de rédiger :

On note F la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n=400$ et $p=0,38$.

On cherche :

- le plus petit entier naturel a tel que $\mathrm{F}(a)>0,025$;
- le plus petit entier naturel b tel que $\mathrm{F}(b)\geqslant 0,975$.

Sur la calculatrice, on rentre la fonction : $\mathrm{Y1}=\mathrm{binomFRép}(400,0.38,\mathrm{X})$.
On définit un pas de table de 1 et $\mathrm{Xmin}=0$.
On trouve $a=133$ et $b=171$.

2e méthode :

On utilise la commande invBinom((faire $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{var}}$ (distrib).

Aire : 0.025 nbreEssais : 400 p : 0.38 coller invBinom(0.025,400,0.38) puis $\boxed{\text{entrer}}$ On trouve 133.	Aire : 0.975 nbreEssais : 400 p : 0.38 coller invBinom(0.975,400,0.38) puis $\boxed{\text{entrer}}$ On trouve 171.

3e méthode : On peut utiliser un programme dans la calculatrice.

Vérifications :

① On a $p=0,38=\dfrac{38}{100}=\dfrac{152}{400}$.
On constate que p appartient bien à l'intervalle de fluctuation et que c'est le centre de cet intervalle.

② On vérifie par le calcul que $P(133\leqslant \mathrm{T}\leqslant 171)$ est voisine de 0,95, en étant légèrement supérieure.

On a : $P(133\leqslant \mathrm{T}\leqslant 171)=P(\mathrm{T}\leqslant 171)-P(\mathrm{T}\leqslant 132)$.

Avec la calculatrice, on obtient : $P(133\leqslant \mathrm{T}\leqslant 171)=0,955583274...$.

③ L'application de la formule donnée en seconde pour l'intervalle de fluctuation au seuil approximatif de 95 % donne :

$p-\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0,38-\dfrac{1}{\sqrt{400}}=0,38-\dfrac{1}{20}=0,38-0,05=0,33$; $p+\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0,38+\dfrac{1}{\sqrt{400}}=0,38+\dfrac{1}{20}=0,38+0,05=0,43$

Or $\dfrac{133}{400}=0,3325$ et $\dfrac{171}{400}=0,4275$.

On constate que les valeurs obtenues grâce à la loi binomiale sont assez proches.

La formule de second permet de gagner du temps dans la recherche des entiers naturels a et b avec la loi binomiale.

2°) Dans la semaine qui suit le changement, on constate que, sur 400 boissons consommées, 44 % sont des cafés.
Peut-on considérer que la proportion de consommation de café est restée stable ?
Répondre en utilisant le résultat de la question 1°).

La fréquence observée de cafés dans l'échantillon correspondant durant la semaine qui suit changement est
$f=\dfrac{44}{100}=\dfrac{176}{400}$.
Comme $f\notin\left[\dfrac{133}{400};\dfrac{171}{400}\right]$, on peut penser que le changement de marque a eu une influence sur le taux de consommation au seuil de 95 % (ou avec un risque de 5 %).

Les données observées sont déclarées incompatibles avec le modèle construit en prenant la valeur 0,38 pour paramètre.

II.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les points $A(1;0)$, $B(0;1)$ et $C(1;1)$.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x+1}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Vérifier brièvement que la courbe $\mathcal{C}$ passe par les points O et C.

$f(0)=0$ et $f(1)=\dfrac{2}{2}=1$ donc $\mathcal{C}$ passe par les points O et C.

1°) Justifier que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;1]$.

On passe par la dérivée (seul moyen simple de justifier le résultat rapidement).

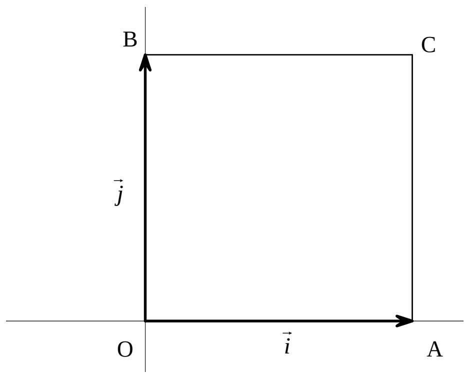
$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \quad f'(x)=\frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2}{(x+1)^2}$$

$\forall x \in [0;1]$ $f'(x)>0$ donc f est croissante (et même strictement croissante) sur $[0;1]$.

Il n'est pas utile de faire un tableau de variations.

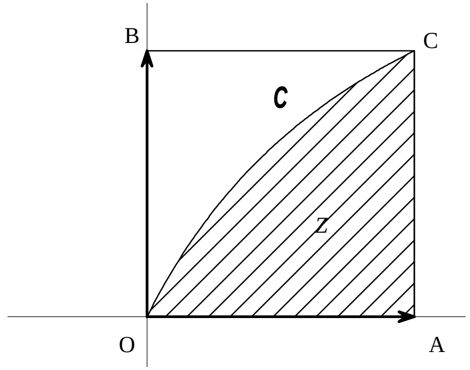
2°) Tracer avec soin et précision l'arc $\overset{\frown}{OC}$ de la courbe $\mathcal{C}$ sur le graphique ci-dessous.



On dresse un tableau de valeurs de la fonction f. On place ensuite les points dans le repère puis on les relie harmonieusement entre eux à main levée.
L'arc $\overset{\frown}{OC}$ n'est pas un arc de cercle ! J'ai trouvé la faute chez pas mal d'élèves.

On sait déjà que la courbe $\mathcal{C}$ passe par les ponts O et C. Deux autres points suffisent à tracer l'arc $\overset{\frown}{OC}$.

On calcule $f(0,25)=0,4$; $f(0,5)=\dfrac{2}{3}=0,66\underline{6}...$; $f(0,75)=\dfrac{6}{7}=0,8571....$



3°) Le carré OACB sert de cible à un jeu de fléchettes. L'arc $\overset{\frown}{OC}$ de la courbe $\mathcal{C}$ partage la cible en deux domaines.
On note Z le domaine compris entre l'arc $\overset{\frown}{OC}$ et l'axe des abscisses.
On précise que l'arc $\overset{\frown}{OC}$, ainsi que les segments $[OA]$ et $[AC]$ font partie du domaine.

Hachurer le domaine Z sur le graphique précédent.

Tracer la courbe $\mathcal{C}$ sur l'écran de la calculatrice (en prenant une fenêtre graphique convenable : par exemple $x \in [-0,2;1,2]$ et $y \in [-0,2;1,2]$) puis, à l'aide de la commande de la calculatrice permettant de calculer l'aire sous la courbe représentative d'une fonction positive (faire $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{trace}}$ (calculs), choisir 7, puis rentrer 0 comme borne inférieure et 1 comme borne supérieure, appuyer une fois sur $\boxed{\text{entrer}}$; une valeur approchée s'affiche en bas de l'écran), déterminer la valeur arrondie au millième de l'aire de Z.

0,614 (un seul résultat, sans égalité)

4°) On admet que la valeur exacte de l'aire de Z est égale à $2-2\ln 2$ où ln 2 désigne le logarithme népérien de 2.
La fonction logarithme népérien, notée ln, est une fonction qu'on ne connaît pas en première. Elle sera étudiée en détail l'année prochaine et correspond à la touche $\boxed{\text{ln}}$ de la calculatrice (sur le côté, tout à fait à gauche, troisième touche en partant du bas). La fonction logarithme népérien ne possède pas d'expression algébrique.

Pour $2-2\ln 2$, la calculatrice donne l'affichage 0,6137056389.
Ce résultat est bien cohérence avec celui obtenu à la question 3°).

Un joueur lance 200 fléchettes. On suppose qu'il atteint chaque fois la cible.
Déterminer à l'aide de la loi binomiale un intervalle de fluctuation au seuil approximatif de 95 % de la fréquence de lancers qui atteignent la zone Z. Donner les bornes sous forme fractionnaire.

$\left[\dfrac{109}{200};\dfrac{136}{200}\right]$ (répondre sans faire de phrase, sans égalité)

La probabilité d'atteindre la zone Z en un lancer est égale à $p=\dfrac{\text{aire de } Z}{\text{aire de OACB}}=\dfrac{2-2\ln 2}{1}=2-2\ln 2$.
On utilise la loi binomiale de paramètres $n=200$ et $p=2-2\ln 2$.

Remarque : Le nombre ln 2 est irrationnel (résultat admis) donc p est un nombre irrationnel.

1ère méthode :

On note T une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 2 - 2\ln 2$.

On cherche :

- le plus petit entier naturel a tel que $P(\mathrm{T} \leqslant a) > 0{,}025$;
- le plus petit entier naturel b tel que $P(\mathrm{T} \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.

Autre manière de rédiger :

On note F la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 2 - 2\ln 2$.

On cherche :

- le plus petit entier naturel a tel que $\mathrm{F}(a) > 0{,}025$;
- le plus petit entier naturel b tel que $\mathrm{F}(b) \geqslant 0{,}975$.

Sur la calculatrice, on rentre la fonction : $\mathrm{Y1} = \mathrm{binomFRép}(200, 2 - 2\ln 2, \mathrm{X})$.
On définit un pas de table de 1 et $\mathrm{Xmin} = 0$.
On trouve $a = 109$ et $b = 136$.

2e méthode :

On utilise la commande invBinom((faire $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{var}}$ (distrib).

Aire : 0.025 nbreEssais : 200 p : $2 - 2\ln 2$ coller invBinom(0.025,200, $2 - 2\ln 2$) puis $\boxed{\text{entrer}}$ On trouve 109.	Aire : 0.975 nbreEssais : 200 p : $2 - 2\ln 2$ coller invBinom(0.975,200, $2 - 2\ln 2$) puis $\boxed{\text{entrer}}$ On trouve 136.

Vérifications :

① On a : $\dfrac{64}{350} = 0{,}545$ et $\dfrac{136}{200} = 0{,}68$.
On constate que la valeur de p (ici $2 - 2\ln 2$) appartient bien à l'intervalle de fluctuation.

Cet intervalle n'est pas centré en p mais ce n'est pas grave.

② On vérifie $P(109 \leqslant \mathrm{T} \leqslant 136)$ est voisine de 0,95, en étant légèrement supérieure.

Calculer l'amplitude de cet intervalle. Donner le résultat sans écrire d'égalité.

$$\frac{27}{200}$$

On obtient ce résultat en effectuant la différence entre la borne de droite et la borne de gauche (définition de l'amplitude d'un intervalle).

5°) a) Écrire un système de deux doubles inéquations qui caractérise l'intérieur du carré OACB et un système de deux doubles inéquations qui caractérise *Z*.

$$\text{OACB} \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases} \qquad Z \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{2x}{x+1} \end{cases}$$

b) On désire réaliser un algorithme permettant de simuler n lancers, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1 saisi en entrée. Pour chaque lancer, on note $(x\,;\,y)$ les coordonnées du point d'impact.
L'algorithme affiche en sortie la fréquence de lancers pour lesquels la zone Z est atteinte.

Compléter l'algorithme suivant :

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
a prend la valeur 0

Traitement :
Pour i allant de 1 à n **Faire**
    x prend la valeur d'un réel aléatoire dans l'intervalle $[0\,;1]$
    y prend la valeur d'un réel aléatoire dans l'intervalle $[0\,;1]$
    z prend la valeur $\dfrac{2x}{x+1}$
    Si $y \leqslant z$
        Alors a prend la valeur $a+1$
    FinSi
FinPour

Sortie :
Afficher $\dfrac{a}{n}$

Bonus sur 1 point (à ne traiter à la fin que si tout le reste a été fait et s'il reste du temps) :

Réaliser le programme sur calculatrice puis le faire tourner 5 fois pour $n = 100$.
Écrire l'échantillon de taille 5 obtenu (c'est-à-dire donner la liste des 5 fréquences obtenues).

0,57 ; 0,59 ; 0,62 ; 0,68 ; 0,52 (résultats de Dimitri Fontanille)

Programme utilisé pour répondre à la question :

```
: Prompt N
: 0 → A
: For(I,1,N)
: NbrAléat → X
: NbrAléat → Y
: (2X)/(X+1) → Z   (attention aux parenthèses)
: If  Y ⩽ Z
: Then
:  A+1 → A
: End
: End
```

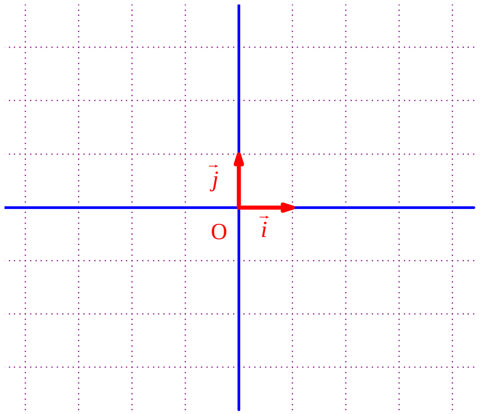
III.

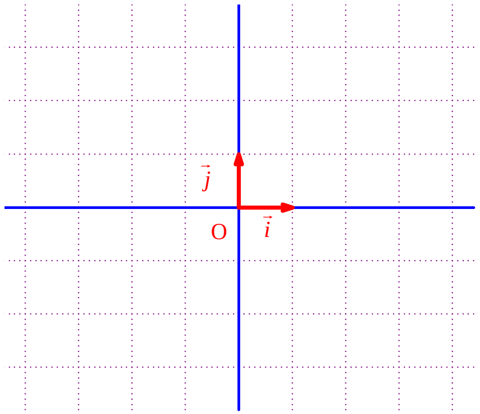
Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

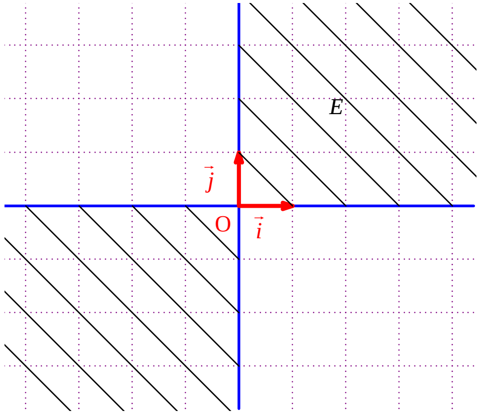
Sur le graphique de gauche, hachurer l'ensemble E des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que $xy \geqslant 0$.

Sur le graphique de droite, hachurer l'ensemble F des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

Il n'y a pas de valeurs à écrire sur les graphiques.





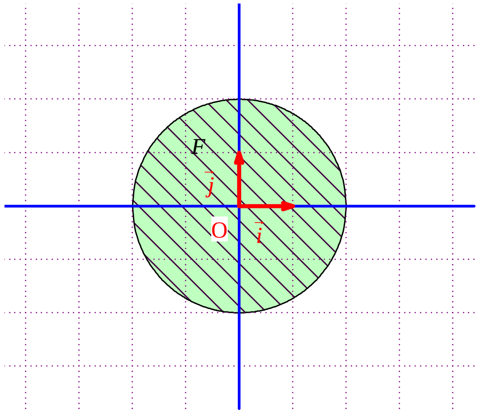


Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$$\mathrm{M} \in E \iff xy \geqslant 0$$

$$\iff \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \leqslant 0 \\ y \leqslant 0 \end{cases}$$

E est la réunion de deux quadrants du plan.



Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$$\mathrm{M} \in F \iff x^2 + y^2 \leqslant 4$$

$$\iff \mathrm{OM}^2 \leqslant 4$$

$$\iff \mathrm{OM} \leqslant 2$$

F est le disque fermé de centre O et de rayon 2.

IV.

Soit a un réel strictement positif donné.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 - ax = 0 \quad (1)$.
On exprimera les solutions en fonction de a. On attend une rédaction à l'aide du symbole d'équivalence.

a est un paramètre.

La seule méthode consiste à passer par une factorisation.

$(1) \Leftrightarrow x^3 - ax = 0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2 - a\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 = a$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$

Comme $a > 0$, les réels 0, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ sont deux à deux distincts.

Soit S l'ensemble de solutions de (1).

$S = \left\{0\,;\sqrt{a}\,;-\sqrt{a}\right\}$