1ère S1

Contrôle du jeudi 11 mai 2017 (3 heures)

I. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) a) 1 point ; b) 2 points)

Les deux questions sont indépendantes.

1°) On considère l'algorithme ci-dessous qui fait intervenir les variables *u* (réel) et *n* (entier naturel).
Il n'est pas demandé de le programmer sur la calculatrice.

> **Entrée :**
> Saisir *u*
>
> **Initialisation :**
> *n* prend la valeur 0
>
> **Traitement :**
> **Tantque** $|u| > 35$ **Faire**
> | u prend la valeur $-\frac{8}{9}u$
> | n prend la valeur $n+1$
> **FinTantque**
>
> **Sortie :**
> Afficher *n*

Faire fonctionner l'algorithme « à la main » pour $u = 63$ saisi en entrée.
Déterminer la valeur de *n* affichée en sortie.
Conseil : Remplir au brouillon un tableau sur le modèle suivant.

Étape	0	1	…………..	
Condition $\|u\| > 35$	$\times$	vraie	…………..	
Valeur de *n*	0		…………..	
Valeur de *u*	63		…………..	

2°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 34$ et la relation de récurrence $9u_{n+1} = -8u_n$ pour tout entier naturel *n*.
Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

a) Calculer S_4. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

b) Choisir parmi les expressions suivantes celle qui est une expression simplifiée de S_n en fonction de *n*.

A. $18\left[1-\left(-\frac{8}{9}\right)^n\right]$ B. $16\left[1-\left(-\frac{9}{8}\right)^{n+1}\right]$ C. $18\left[1-\left(-\frac{8}{9}\right)^{n+1}\right]$ D. $16\left[1-\left(-\frac{9}{8}\right)^n\right]$

II. (8 points : 1°) 2 points ; 2°) a) 2 points ; b) 2 points ; 3°) 2 points)

Une entreprise se lance dans la conception et la fabrication d'un nouveau produit en 2010 et passe à la commercialisation l'année suivante.
Les résultats des ventes durant les trois premières années sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Année	2010	2011	2012
Nombre d'unités vendues	0	5000	11000

Le nombre d'unités vendues par l'entreprise l'année $2010+n$ est modélisé par une suite (u_n) de premier terme $u_0 = 0$ et vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où *a* et *b* sont deux réels.

1°) En supposant que $u_1 = 5000$ et $u_2 = 11000$, déterminer les valeurs de *a* et *b*.
Répondre sans justifier après recherche au brouillon.

Dans toute la suite de l'exercice, *a* et *b* ont les valeurs déterminées précédemment.

2°) Le but de cette question est d'exprimer u_n en fonction de *n*.
On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel *n* par $v_n = u_n + 25000$.
Calculer au brouillon v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Conjecturer la nature de la suite (v_n).

a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier naturel *n*.
On présentera les calculs selon le modèle présenté dans le cadre ci-dessous à recopier et compléter.

> $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = u_{n+1} + 25000$
>
> $=$
>
> $=$

En déduire la nature de la suite (v_n). On rédigera une phrase sur le modèle suivant à recopier et compléter :
« La relation $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = ...$ que l'on vient d'obtenir permet d'affirmer que la suite (v_n) est une suite … ».

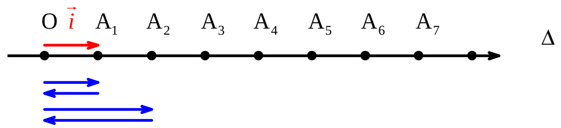
b) En déduire v_n puis u_n en fonction de *n*.

3°) On fait l'hypothèse que le modèle est une bonne estimation du nombre d'unités que l'entreprise va vendre jusqu'en 2022.

Calculer le nombre total d'unités vendues entre les années 2010 et 2022 (comprises).
On prendra pour nombre d'unités vendues l'année $2010+n$ la valeur de u_n éventuellement arrondie à l'unité.

III. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) a) 2 points ; b) 1 point)

Soit Δ un axe de repère $\left(\text{O}, \vec{i}\right)$ tel que $\left\|\vec{i}\right\| = 1$. Pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, on note A_k le point de Δ d'abscisse k.
Un mobile se déplace sur Δ en effectuant des allers-retours successifs entre le point O et les points A_k selon le principe suivant.
Premier trajet : Il part de O, va jusqu'à A_1, fait demi-tour et retourne en O.
Deuxième trajet : Il part de O, va jusqu'à A_2, fait demi-tour et retourne en O.
Troisième trajet : Il part de O, va jusqu'à A_3, fait demi-tour et retourne en O.
Et ainsi de suite.



1°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n la distance parcourue lors du n-ième trajet.
Donner les valeurs de u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.
Recopier et compléter la phrase : « La suite $\left(u_n\right)$ est une suite ……… de raison … et de premier terme $u_1 = ...$ ».

2°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note d_n la distance totale parcourue par le mobile jusqu'au n-ième trajet (inclus).

a) Exprimer d_n en fonction de n sous forme simplifiée.
b) Calculer d_{100}.

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Un institut effectue un sondage pour connaître dans une population donnée la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon de personnes de cette population et l'on pose une question à chaque personne. On admet que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6. Aucune explication n'est demandée dans cet exercice.

1°) L'institut de sondage interroge 700 personnes. Quelle est la probabilité que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400 ? On donnera la valeur arrondie au millième.

2°) Combien de personnes l'institut doit-il interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieure à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400 ?

V. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Un jeu consiste à lancer une pièce équilibrée. Pour jouer une partie, on doit payer 4,50 €. Si l'on obtient le côté pile, on gagne 10 € ; si l'on obtient le côté face, on ne perd ni ne gagne rien.
On s'intéresse à un joueur qui joue N parties indépendantes où N est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note X le nombre de piles obtenus et G le gain algébrique en euros.

1°) Exprimer G en fonction de X et de N.

2°) Calculer l'espérance et la variance de G en fonction de N.

3°) On note p la probabilité que le joueur ait un gain strictement négatif.
Déterminer la valeur de p arrondie au millième pour $N = 25$.

VI. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère un carré ABCD de côté 2.
Soit M un point quelconque du segment $[\text{CD}]$. On pose $\text{CM} = x$.

1°) Le but de cette question est de calculer le produit scalaire $p = \overrightarrow{\text{AC}} \bullet \overrightarrow{\text{BM}}$ en fonction de x.
En décomposant les vecteurs $\overrightarrow{\text{AC}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\bullet\bullet}$ et $\overrightarrow{\text{BM}} = \overrightarrow{\text{BC}} + \overrightarrow{\bullet\bullet}$, écrire p sous la forme d'une somme de 4 produits scalaires.
Achever le calcul.

2°) On suppose dans cette question que M est le milieu de $[\text{CD}]$.
On note θ la mesure en radians de l'angle aigu formé par les droites (AC) et (BM).
À l'aide du résultat de la question 1°), calculer $\cos\theta$.

VII. (9 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point ; 5°) 2 points)

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les points $\text{A}(-1\,;2)$, $\text{B}(9\,;7)$ et $\text{C}(0\,;-5)$.

1°) Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC) (lire les consignes données en bas de page).

2°) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à la droite (BC).

3°) À l'aide des résultats des questions précédentes, déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur (BC).

4°) Déterminer une équation cartésienne du cercle Γ de centre A tangent à la droite (BC).
Répondre sans justifier.

5°) Déterminer les abscisses des points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses.
Répondre sans justifier.

On donne ci-dessous le modèle de rédaction attendu pour la résolution des questions 1°) et 2°).

Soit M un point quelconque de P de coordonnées $(x\,;y)$.

$\text{M} \in (\text{BC}) \Leftrightarrow$ ……………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………

Pour (BC), on complètera la première ligne par une phrase.

Pour Δ, on complètera la première ligne par un produit scalaire sans coordonnées.

Prénom : ……………………………………… **Nom :** ……………………………………….

I (5)	II (8)	III (4)	IV (4)	V (6)	VI (4)	VII (9)	Total/40	Total/20

I. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) a) 1 point ; b) 2 points)

1°) ………………. (une seule valeur)

2°) a) ……………………………………..… (une seule égalité) b) ………. (une seule lettre)

II. (8 points : 1°) 2 points ; 2°) a) 2 points ; b) 2 points ; 3°) 2 points)

1°) ……………………..……………..…………………………..…… (deux égalités)

2°) a) ……………………..……………………………………………………………………………………..

………..

………..

………..

………..

b) …………..……………………………………………………………………………………………..

………..

………..

………..

………..

3°) ……………………..……………………………………………………………………………………..

………..

III. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) a) 2 points ; b) 1 point)

1°) ………………………………………………………………………..………………………… (5 égalités)

………..

………..

2°) a) ……………………………… (une seule égalité) ; b) ……………………………… (une seule égalité)

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) …………………………….. (une seule réponse, sans égalité)

2°) …………………………….. (une seule réponse, sans égalité)

V. (7 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

1°) ………………………………..……………….. (une seule égalité)

2°) ……………………..……………………………………………………………………………………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

3°) …………………………….. (une seule réponse, sans égalité)

VI. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) …

…

…

…

…

…

2°) …

…

…

…

…

VII. (8 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point ; 5°) 1 point)

1°) …

…

…

…

…

…

…

2°) …

…

…

…

…

…

…

3°) …

…

…

…

…

…

…

…

…

…

…

4°) … (une seule réponse)

5°) … (écrire les valeurs sans égalité)

Corrigé du contrôle du 11-5-2017

I.

Les deux questions sont indépendantes.

1°) On considère l'algorithme ci-dessous qui fait intervenir les variables *u* (réel) et *n* (entier naturel).
Il n'est pas demandé de le programmer sur la calculatrice.

Entrée :
Saisir u

Initialisation :
n prend la valeur 0

Traitement :
Tantque $|u| > 35$ **Faire**
  u prend la valeur $-\frac{8}{9}u$
  n prend la valeur $n+1$
FinTantque

Sortie :
Afficher n

Faire fonctionner l'algorithme « à la main » pour $u = 63$ saisi en entrée.
Déterminer la valeur de n affichée en sortie.
Conseil : Remplir au brouillon un tableau sur le modèle suivant.

On remplit le tableau d'évolution des variables avec des valeurs exactes (sous forme fractionnaire).
On ne travaille qu'avec des valeurs exactes.

Étape	0	1	2	3	4	5	6
Condition $\|u\| > 35$		vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	faux
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	
Valeur de u	63	-56	$\frac{448}{9}$	$-\frac{3584}{81}$	$\frac{28672}{729}$	$-\frac{229376}{6561}$	

$-\frac{8}{9}\times 63 = -56$; $-\frac{8}{9}\times 56 = \frac{448}{9}$; $-\frac{8}{9}\times\frac{448}{9} = -\frac{3584}{81}$; $-\frac{8}{9}\times\left(-\frac{3584}{81}\right) = \frac{28672}{729}$; $-\frac{8}{9}\times\frac{28672}{729} = -\frac{229376}{6561}$

Avec la calculatrice, on obtient $-\frac{229376}{6561} = -34,9605243...$.

La valeur de n affichée en sortie est 5.

On peut vérifier cette valeur en programmant l'algorithme sur la calculatrice.

2°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 34$ et la relation de récurrence $9u_{n+1} = -8u_n$ pour tout entier naturel n.
Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

a) Calculer S_4. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

On doit calculer la somme $S_4 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4$.
Il y a deux méthodes possibles.

1ère méthode :

La relation $\forall n \in \mathbb{N} \quad 9u_{n+1} = -8u_n$ permet d'écrire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = -\frac{8}{9}u_n$.

D'après cette relation, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{8}{9}$.

On peut donc appliquer la formule donnant l'expression simplifiée d'une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

$$S_4 = 34\times\frac{1-\left(-\frac{8}{9}\right)^5}{1-\left(-\frac{8}{9}\right)}$$ (la somme S_4 comporte 5 termes d'où la présence de l'exposant 5)

$$= 34\times\frac{1-\left(-\frac{8}{9}\right)^5}{\frac{17}{9}}$$

$$= 34\times\frac{9}{17}\left[1-\left(-\frac{8}{9}\right)^5\right]$$

$$= 2\times 9\times\left[1-\left(-\frac{8}{9}\right)^5\right]$$ (on simplifie le 34 présent au numérateur avec le 17 présent au dénominateur)

$$= 2\times 9\times\left(1+\frac{8^5}{9^5}\right)$$

$$= 2\times 9\times\frac{8^5+9^5}{9^5}$$

$$= 2\times\frac{8^5+9^5}{9^4}$$

$$= 2\times\frac{91817}{6561}$$

$$= \frac{18634}{6561}$$

2^{e} méthode :

Comme la somme ne comporte qu'un petit nombre de termes, on peut calculer ces termes puis faire leur somme.

$u_1 = -\dfrac{272}{9}$ $\quad u_2 = \dfrac{2176}{81}$ $\quad u_3 = -\dfrac{17408}{729}$ $\quad u_4 = \dfrac{139264}{6561}$

On calcule ensuite la somme de u_0, u_1, u_2, u_3, u_4.

Le calcul serait facilité pour la recherche du dénominateur commun si l'on avait exprimé les dénominateurs sous la forme de puissances de 3.

b) Choisir parmi les expressions suivantes celle qui est une expression simplifiée de S_n en fonction de *n*.

A. $18\left[1-\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n\right]$ $\quad$ B. $16\left[1-\left(-\dfrac{9}{8}\right)^{n+1}\right]$ $\quad$ C. $18\left[1-\left(-\dfrac{8}{9}\right)^{n+1}\right]$ $\quad$ D. $16\left[1-\left(-\dfrac{9}{8}\right)^n\right]$

L'expression qui est une expression simplifiée de S_n est l'expression C.

Comme nous l'avons déjà dit dans la 1ère méthode de la question précédente, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{8}{9}$.

On peut donc appliquer la formule donnant l'expression simplifiée d'une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

$$S_n = 34\times\frac{1-\left(-\dfrac{8}{9}\right)^{n+1}}{1-\left(-\dfrac{8}{9}\right)}$$ (la somme S_n comporte $n+1$ termes d'où la présence de l'exposant $n+1$)

$$= 34\times\frac{1-\left(-\dfrac{8}{9}\right)^{n+1}}{\dfrac{17}{9}}$$

$$= 34\times\frac{9}{17}\left[1-\left(-\frac{8}{9}\right)^{n+1}\right]$$

$$= 18\left[1-\left(-\frac{8}{9}\right)^{n+1}\right]$$

II.

Une entreprise se lance dans la conception et la fabrication d'un nouveau produit en 2010 et passe à la commercialisation l'année suivante.
Les résultats des ventes durant les trois premières années sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Année	2010	2011	2012
Nombre d'unités vendues	0	5000	11000

Le nombre d'unités vendues par l'entreprise l'année $2010+n$ est modélisé par une suite (u_n) de premier terme $u_0=0$ et vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1}=au_n+b$ où *a* et *b* sont deux réels.

1°) En supposant que $u_1=5000$ et $u_2=11000$, déterminer les valeurs de *a* et *b*.
Répondre sans justifier après recherche au brouillon.

Dans toute la suite de l'exercice, *a* et *b* ont les valeurs déterminées précédemment.

On a : $u_1 = a\times u_0 + b$.
Or $u_1 = 5000$ et $u_0 = 0$. Donc $5000 = a\times 0 + b$.
Ainsi, on obtient immédiatement $b = 5000$.

On a : $u_2 = a\times u_1 + b$ soit $u_2 = a\times u_1 + 5000$.
Or $u_2 = 11000$ et $u_1 = 5000$. Donc $11000 = a\times 5000 + 5000$.
Cette dernière égalité donne $5000a = 6000$.
Par suite, $a=\dfrac{6}{5}$ ce qui donne finalement $a=1{,}2$.

On écrit 1,2 plutôt que $\dfrac{6}{5}$.

On a donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=1{,}2u_n+5000$.

2°) Le but de cette question est d'exprimer u_n en fonction de *n*.
On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel *n* par $v_n = u_n + 25000$.
Calculer au brouillon v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Conjecturer la nature de la suite (v_n).

$v_0 = 25000$, $v_1 = 30000$, $v_2 = 36000$, $v_3 = 43200$, $v_4 = 51840$, $v_5 = 62208$

On peut conjecturer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,2.

a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier naturel *n*.
On présentera les calculs selon le modèle présenté dans le cadre ci-dessous à recopier et compléter.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} &= u_{n+1} + 25000 \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

En déduire la nature de la suite (v_n). On rédigera une phrase sur le modèle suivant à recopier et compléter :
« La relation $\forall n \in \mathbb{N} \;\; v_{n+1} = ...$ que l'on vient d'obtenir permet d'affirmer que la suite (v_n) est une suite … ».

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} &= u_{n+1} + 25000 \\ &= 1,2u_n + 5000 + 25000 \\ &= 1,2u_n + 30000 \\ &= 1,2\left(v_n - 25000\right) + 30000 \\ &= 1,2v_n - 30000 + 30000 \\ &= 1,2v_n\end{aligned}$$

La relation $\forall n \in \mathbb{N} \;\; v_{n+1} = 1,2v_n$ que l'on vient d'obtenir permet d'affirmer que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 25000$ et de raison 1,2.

b) En déduire v_n puis u_n en fonction de *n*.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 25000 \times 1,2^n$

Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + 25000$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n - 25000$.

Finalement, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 25000 \times 1,2^n - 25000$.

3°) On fait l'hypothèse que le modèle est une bonne estimation du nombre d'unités que l'entreprise va vendre jusqu'en 2022.

Calculer le nombre total d'unités vendues entre les années 2010 et 2022 (comprises).
On prendra pour nombre d'unités vendues l'année $2010 + n$ la valeur de u_n éventuellement arrondie à l'unité.

On rentre la fonction $f : x \mapsto 25000 \times 1,2^x - 25000$ dans la calculatrice afin d'obtenir un tableau de valeurs avec un pas de 1.

Les valeurs de $f(x)$ sont arrondies à l'unité.

x	$f(x)$
0	0
1	5000
2	11000
3	18400
4	26840
5	37208
6	49650
7	64580
8	82495
9	103995
10	129793
11	160752
12	197903

La somme des nombres de la colonne de droite est égale à 887 416.

Le nombre total d'unités vendues entre les années 2010 et 2022 (compris) est égal à 887 416.

Autre méthode (moins bien car plus éloignée de la démarche demandée dans l'énoncé par arrondis à l'unité) :

On calcule $S = u_0 + u_1 + ... + u_{12} = \sum_{k=0}^{k=12} u_k$.

Il n'est pas possible de calculer directement la valeur de *S* car la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

On a $S = \sum_{k=0}^{k=12} \left(v_k - 25000\right)$ donc $S = \left(\sum_{k=0}^{k=12} v_k\right) - 25000 \times 13$.

$$\begin{aligned}S &= 25000 \times \frac{1,2^{13} - 1}{1,2 - 1} - 25000 \times 13 \\ &= 25000 \times \frac{1,2^{13} - 1}{0,2} - 25000 \times 13 \\ &= 25000 \times 5 \times \left(1,2^{13} - 1\right) - 25000 \times 13 \\ &= 125000 \times 1,2^{13} - 450000\end{aligned}$$

Avec la calculatrice, on trouve $S = 887415,067...$. Le résultat est proche de celui trouvé par la « bonne » méthode (méthode conforme aux directive de l'énoncé).

Autre méthode à l'aide de la calculatrice (très bien car évite les calculs fastidieux) :

On utilise la commande de sommation ainsi que la commande d'arrondi.

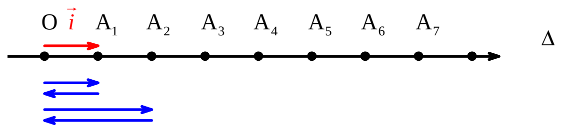
La commande d'arrondi automatique s'obtient en faisant $\boxed{\text{math}}$ puis rubrique NBRE et enfin choix 2 : arrondir(.

La commande d'arrondi automatique s'utilise en tapant le nombre puis une virgule puis le rang de la décimale sur laquelle va porter l'arrondi (0 si c'est un arrondi à l'unité, 1 si c'est un arrondi au dixième, 2 si c'est un arrondi au centième etc.). Ici, on utilise un arrondi automatique à l'unité d'où la présence du 0.

La formule qui s'affiche à l'écran est : $\sum_{K=0}^{12}\left(\text{arrondir}\left(25000\times 1{,}2^{K}-25000,0\right)\right)$.

III.

Soit Δ un axe de repère $\left(O,\vec{i}\right)$ tel que $\left\|\vec{i}\right\|=1$. Pour tout entier naturel $k\geqslant 1$, on note A_k le point de Δ d'abscisse k.
Un mobile se déplace sur Δ en effectuant des allers-retours successifs entre le point O et les points A_k selon le principe suivant.
Premier trajet : Il part de O, va jusqu'à A_1, fait demi-tour et retourne en O.
Deuxième trajet : Il part de O, va jusqu'à A_2, fait demi-tour et retourne en O.
Troisième trajet : Il part de O, va jusqu'à A_3, fait demi-tour et retourne en O.
Et ainsi de suite.



1°) Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on note u_n la distance parcourue lors du n-ième trajet.
Donner les valeurs de u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.
Recopier et compléter la phrase : « La suite $\left(u_n\right)$ est une suite ……… de raison … et de premier terme $u_1=....$ ».

$u_1=2$, $u_2=4$, $u_3=6$, $u_4=8$, $u_5=10$

La suite $\left(u_n\right)$ est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_1=2$.

2°) Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on note d_n la distance totale parcourue par le mobile jusqu'au n-ième trajet (inclus).

a) Exprimer d_n en fonction de n sous forme simplifiée.

d_n est la distance totale parcourue par le mobile jusqu'au n-ième trajet (inclus).

Donc d_n est la <u>somme</u> des distances parcourues à chaque trajet par le mobile jusqu'au n-ième trajet (inclus).

Ainsi : $d_n=u_1+u_2+...+u_n$ (ou encore $d_n=\sum_{k=1}^{k=n}u_k$).

d_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique donc $d_n=n\times\frac{u_1+u_n}{2}$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n=u_1+2\left(n-1\right)$ soit $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n=2n$.

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad d_n=n\times\frac{2+2n}{2}$$

$$=n\times\left(n+1\right)$$ (ou encore $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad d_n=n^2+n$)

b) Calculer d_{100}.

On utilise la formule trouvée à la question précédente en remplaçant n par 100.

$d_{100}=100\times\left(100+1\right)=100\times 101=10100$

IV.

Un institut effectue un sondage pour connaître dans une population donnée la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon de personnes de cette population et l'on pose une question à chaque personne. On admet que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6. Aucune explication n'est demandée dans cet exercice.

1°) L'institut de sondage interroge 700 personnes. Quelle est la probabilité que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400 ? On donnera la valeur arrondie au millième.

Pour chaque personne il n'y a que deux issues possibles : répondre/ne pas répondre.
Si de plus on fait l'hypothèse que les choix des personnes sont indépendants, on peut affirmer que X suit une loi binomiale de paramètres $n=700$ et $p=0{,}6$.

$P\left(X\geqslant 400\right)=1-P\left(X<400\right)=1-P\left(X\leqslant 399\right)$

La calculatrice donne $P\left(X\geqslant 400\right)=0{,}942726075...$

La valeur arrondie au millième de $P\left(X\geqslant 400\right)$ est 0,943.

2°) Combien de personnes l'institut doit-il interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieure à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400 ?

On désigne par n le nombre de personnes interrogées lors du sondage.

On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant accepté de répondre.

Y suit la loi binomiale de paramètres n et $p=0{,}6$

On cherche le plus petit entier naturel n tel que $P\left(Y\geqslant 400\right)>0{,}9$ $\;(1)$.

On peut déjà affirmer que $n \leqslant 700$.
Une exploration à la calculatrice donne $n = 694$ car si on a pour $n = 694$ $P(\text{Y} \geqslant 400) > 0,9$ et pour $n = 693$ $P(\text{Y} \geqslant 400) < 0,9$.
Il suffit donc d'interroger 694 personnes pour garantir, avec une probabilité supérieure à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.

Autre méthode :

On peut aussi créer une « fonction » sur calculatrice.

$(1) \Leftrightarrow 1 - P(\text{Y} \leqslant 399) > 0,9$.

On rentre la fonction $\text{Y1} = 1 - \text{binomFRép}(\text{X}, 0,6, 399)$.

V.

Un jeu consiste à lancer une pièce équilibrée. Pour jouer une partie, on doit payer 4,50 €. Si l'on obtient le côté pile, on gagne 10 € ; si l'on obtient le côté face, on ne perd ni ne gagne rien.
On s'intéresse à un joueur qui joue *N* parties indépendantes où *N* est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note X le nombre de piles obtenus et G le gain algébrique en euros.

1°) Exprimer G en fonction de X et de *N*.

$$\text{G} = 10\text{X} - 4,5N$$

2°) Calculer l'espérance et la variance de G en fonction de *N*.

On commence par calculer l'espérance et la variance de X.
X suit la loi binomiale de paramètres *N* et $p = \dfrac{1}{2}$ (car la pièce est équilibrée par hypothèse).
Les formules donnant l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale.

$$\text{E}(\text{X}) = N \times \frac{1}{2} = \frac{N}{2} \qquad \text{E}(\text{X}) = N \times P(\text{« Pile »})$$

$$\text{V}(\text{X}) = N \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{N}{4} \qquad \text{V}(\text{X}) = N \times P(\text{« Pile »}) \times P(\text{« Face »})$$

• Attention, G ne suit pas la loi binomiale. Seule X suit une loi binomiale.
G est un gain algébrique en euros alors que X compte un nombre de succès.
On ne peut donc pas calculer l'espérance et la variance de G en utilisant les formules du cours sur l'espérance et la variance d'une variable qui suit une loi binomiale.

• On utilise les formules données par une propriété du cours sur les variables aléatoires :
$\text{E}(a\text{X} + b) = a \times \text{E}(\text{X}) + b$ et $\text{V}(a\text{X} + b) = a^2 \times \text{V}(\text{X})$.

$$\begin{aligned}\text{E}(\text{G}) &= 10\text{E}(\text{X}) - 4,5N \\ &= 10 \times \frac{N}{2} - 4,5N \\ &= 5N - 4,5N \\ &= 0,5N\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{V}(\text{G}) &= 10^2\,\text{V}(\text{X}) \\ &= 100 \times \frac{N}{4} \\ &= 25N\end{aligned}$$

3°) On note *p* la probabilité que le joueur ait un gain strictement négatif.
Déterminer la valeur de *p* arrondie au millième pour $N = 25$.

On sait que G désigne le gain. On cherche donc $p = P(\text{G} < 0)$.

Pour commencer, on sait que $N = 25$ donc on a $\text{G} = 10\text{X} - 4,5 \times 25$ soit $\text{G} = 10\text{X} - 112,5$.

On cherche les valeurs de X telles que $\text{G} < 0$ (1).

$(1) \Leftrightarrow 10\text{X} - 112,5 < 0$

$\Leftrightarrow \text{X} < 11,25$

$\Leftrightarrow \text{X} \leqslant 11$ (car les valeurs de X sont des entiers naturels)

On revient à notre calcul. On vient de démontrer que $\text{G} < 0 \Leftrightarrow \text{X} \leqslant 11$ donc on peut écrire $p = P(\text{X} \leqslant 11)$.

Avec la calculatrice, on trouve $p = 0,345018982...$.

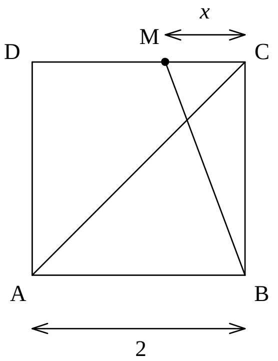
La valeur arrondie au millième de *p* est 0,345.

VI.

On considère un carré ABCD de côté 2.
Soit M un point quelconque du segment $[\text{CD}]$. On pose $\text{CM} = x$.

1°) Le but de cette question est de calculer le produit scalaire $p = \overrightarrow{\text{AC}} \cdot \overrightarrow{\text{BM}}$ en fonction de *x*.
En décomposant les vecteurs $\overrightarrow{\text{AC}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\bullet\bullet}$ et $\overrightarrow{\text{BM}} = \overrightarrow{\text{BC}} + \overrightarrow{\bullet\bullet}$, écrire *p* sous la forme d'une somme de 4 produits scalaires.
Achever le calcul.

On commence par faire une figure soignée avec (AB) « horizontale », A à gauche de B, C et D au-dessus (disposition traditionnelle des points pour un carré ABCD).



$p = \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BM}$

$= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \bullet \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}\right)$

$= \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{CM}$

Il n'y a pas besoin d'écrire des parenthèses autour de chaque produit scalaire.

$M \in [CD]$ par hypothèse donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires de sens contraires.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux donc leur produit scalaire est nul.

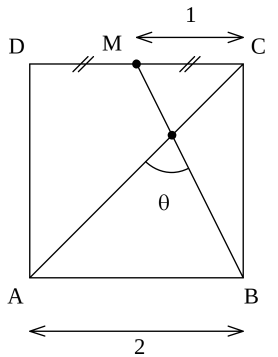
Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont orthogonaux donc leur produit scalaire est nul.

$p = 0 - AB \times CM + BC^2 + 0$

$= -2x + 4$

$= 4 - 2x$

2°) On suppose dans cette question que M est le milieu de $[CD]$.
On note θ la mesure en radians de l'angle aigu formé par les droites (AC) et (BM).
À l'aide du résultat de la question 1°), calculer $\cos\theta$.



Par hypothèse, M est le milieu de $[CD]$ donc $x = 1$.

D'après le résultat de la question précédente, $p = 4 - 2 \times 1 = 2$.

$AC = 2\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 2) et $BM = \sqrt{5}$ (théorème de Pythagore).

On observe que θ est la mesure en radians de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BM}$.

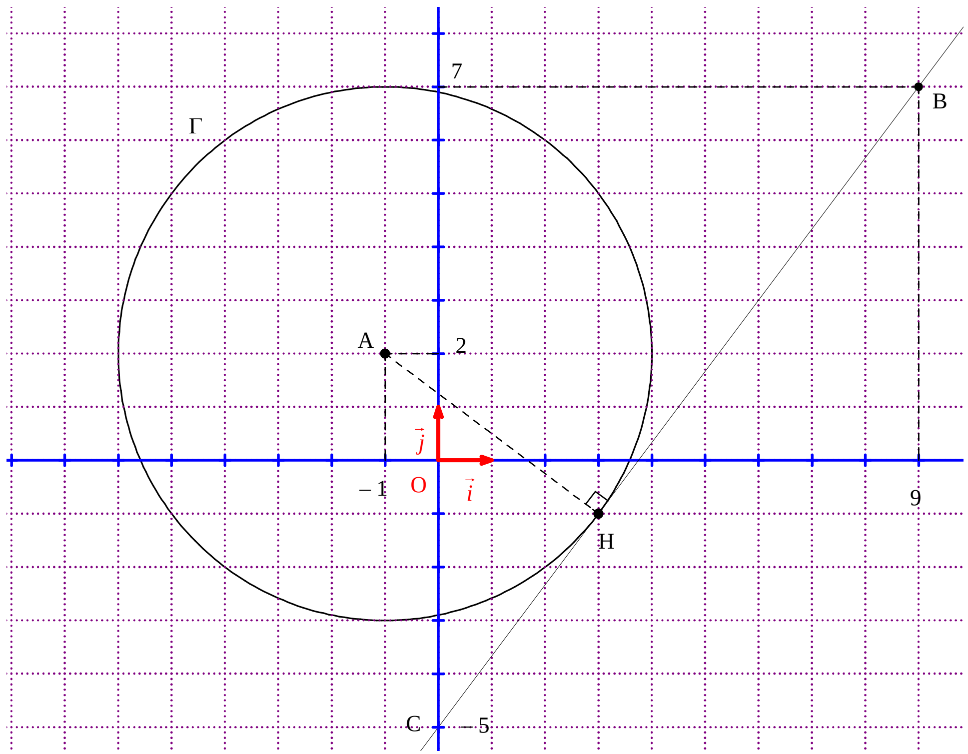
Par suite, $p = 2\sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \cos\theta$ soit $p = 2\sqrt{10} \times \cos\theta$.

Comme $p = 2$, on a $\cos\theta = \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2} \times \sqrt{10}}$ soit $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

On pourrait aussi utiliser la formule du côté pour résoudre cette question mais cela ne répond pas à la demande formulée dans la question d'utiliser le résultat de la question 1°).
Il faut noter I le point d'intersection des droites (AC) et (BM). On travaille ensuite par exemple dans le triangle AIB.
Il faut ensuite calculer les longueurs AI et IB à l'aide du théorème de Thalès.

VII.

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les points $A(-1\,;2)$, $B(9\,;7)$ et $C(0\,;-5)$.



1°) Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC) (lire les consignes données en bas de page).

On utilise la méthode vectorielle demandée dans l'énoncé et apprise cette année (modèle de rédaction imposé).

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$\mathrm{M} \in (\mathrm{BC}) \Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BM}}\left|\begin{array}{l}x-9\\y-7\end{array}\right.$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\left|\begin{array}{l}-9\\-12\end{array}\right.$ sont colinéaires (1ère ligne sans calcul)

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-9 & -9 \\ y-7 & -12 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -12\times(x-9)-(-9)\times(y-7)=0$

$\Leftrightarrow -12(x-9)+9(y-7)=0$

$\Leftrightarrow -4(x-9)+3(y-7)=0$ (on simplifie les deux membres par 3)

$\Leftrightarrow -4x+36+3y-21=0$

$\Leftrightarrow -4x+3y+15=0$

$\Leftrightarrow 4x-3y-15=0$

(BC) a pour équation cartésienne $4x-3y-15=0$.

2°) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à la droite (BC).

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$\mathrm{M} \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{BC}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AM}} = 0$ (1ère ligne sans coordonnées ; on peut aussi écrire $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$)

$\Leftrightarrow -9\times(x+1)+(-12)\times(y-2)=0$

$\Leftrightarrow 3\times(x+1)+4\times(y-2)=0$ (on simplifie les deux membres par – 3)

$\Leftrightarrow 3x+4y-5=0$

Δ a pour équation cartésienne $3x+4y-5=0$.

3°) À l'aide des résultats des questions précédentes, déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur (BC).

H est le projeté orthogonal de A sur (BC) donc H est le point d'intersection des droites (BC) et Δ.

Donc le couple de ses coordonnées est la solution du système $\begin{cases} 4x-3y-15=0 \\ 3x+4y-5=0 \end{cases}$.

On doit résoudre ce système linéaire de deux équations à deux inconnues.

Pour le résoudre « à la main », le mieux est d'utiliser la méthode des multiplicateurs.
On peut aussi utiliser la commande de la calculatrice pour la résolution des systèmes linéaires.

$$\begin{cases} 4x-3y-15=0 \\ 3x+4y-5=0 \end{cases} \quad \begin{array}{|c|c} \times 4 & \times(-3) \\ \times 3 & \times 4 \end{array}$$

$$\begin{cases} 25x-75=0 \\ 25y+25=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$$

Donc H a pour coordonnées $(3\,;-1)$.
On vérifie ce résultat graphiquement.

4°) Déterminer une équation cartésienne du cercle Γ de centre A tangent à la droite (BC).
Répondre sans justifier.

Γ est le cercle de centre A passant par H.

Un calcul immédiat donne $\mathrm{AH}=5$.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$\mathrm{M} \in \Gamma \Leftrightarrow \mathrm{AM}^2 = 25$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=25$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-4y+4=25$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-4y-20=0$

Γ a pour équation cartésienne $x^2+y^2+2x-4y-20=0$.

5°) Déterminer les abscisses des points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses.
Répondre sans justifier.

Les abscisses des points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $x^2+2x-20=0$ (1).

Il s'agit d'une équation du second degré dont le discriminant réduit est égal à 21.

(1) admet donc deux solutions réelles distinctes $x_1=-1-\sqrt{21}$ et $x_2=-1+\sqrt{21}$.

Les abscisses des points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses sont donc $-1-\sqrt{21}$ et $-1+\sqrt{21}$.

On peut contrôler ce résultat graphiquement.

On donne ci-dessous le modèle de rédaction attendu pour la résolution des questions 1°) et 2°).

Soit M un point quelconque de P de coordonnées $(x\,;y)$.

$\mathrm{M} \in (\mathrm{BC}) \Leftrightarrow$ ………………………………………

$\Leftrightarrow$ ………………………………………

$\Leftrightarrow$ ………………………………………

$\Leftrightarrow$ ………………………………………

Pour (BC), on complètera la première ligne par une phrase.

Pour Δ, on complètera la première ligne par un produit scalaire sans coordonnées.