Partie pour les élèves n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques (1 heure)

Le barème est donné sur 20.

Prénom : …………………………………..…. **Nom :** ………………………………………………

I. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points + 1 point)

On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \ln\left(1+\mathrm{e}^{u_n}\right)$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.
Conjecturer l'expression de u_n en fonction de *n*. On rédigera ainsi : « Il semble que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = $.............. ».

……..

……..

……..

……..

2°) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \mathrm{e}^{u_n}$ pour tout entier naturel *n*.
Déterminer la nature de la suite (v_n). En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

II. (8 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point + 2 point ; 4°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{1-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$. On donnera le résultat sous forme factorisée.

$\forall x \in \mathbb{R}$ ………………..……………………………………

2°) Compléter la phrase suivante :

$\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses ……………………………………………………………. .

3°) Compléter sans justifier l'égalité de limite suivante : $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = $.............. .

En observant que pour tout réel $x \neq 0$ $\quad f(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{x} \times \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}}$, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

4°) Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0\,;1]$.

………………………………………… (un seul résultat en unité d'aire)

III. (8 points : 1°) 4 points ; 2°) 4 points)

On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $z_0 = 1$ et telle que pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \left(1 + \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\right) z_n$.

Les deux questions sont indépendantes.

1°) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

2°) On se place dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.

Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{O}}, \overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}\right)$.

En déduire que pour tout entier naturel n, le triangle $\mathrm{O}\,\mathrm{A}_n\,\mathrm{A}_{n+1}$ est rectangle en A_n.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Corrigé

I.

On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \ln\left(1+\mathrm{e}^{u_n}\right)$ pour tout entier naturel n.

1°) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.
Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n. On rédigera ainsi : « Il semble que $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_n = ...$ ».

$u_1 = \ln\left(1+\mathrm{e}^{u_0}\right)$	$u_2 = \ln\left(1+\mathrm{e}^{u_1}\right)$	$u_3 = \ln\left(1+\mathrm{e}^{u_2}\right)$	$u_4 = \ln\left(1+\mathrm{e}^{u_3}\right)$
$= \ln\left(1+\mathrm{e}^{0}\right)$	$= \ln\left(1+\mathrm{e}^{\ln 2}\right)$	$= \ln\left(1+\mathrm{e}^{\ln 3}\right)$	$= \ln\left(1+\mathrm{e}^{\ln 4}\right)$
$= \ln 2$	$= \ln 3$	$= \ln 4$	$= \ln 5$

Pour u_3, on peut aussi écrire $u_3 = 2\ln 2$ mais cette écriture ne sert pas pour formuler la conjecture.

Il semble que $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_n = \ln(n+1)$.

2°) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \mathrm{e}^{u_n}$ pour tout entier naturel n.
Déterminer la nature de la suite (v_n). En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

$\forall n \in \mathbb{N}\quad u_{n+1} = \ln\left(1+\mathrm{e}^{u_n}\right)$ donc $\quad \forall n \in \mathbb{N}\quad \mathrm{e}^{u_{n+1}} = 1+\mathrm{e}^{u_n}$

Or $\forall n \in \mathbb{N}\quad v_n = \mathrm{e}^{u_n}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}\quad v_{n+1} = 1+v_n$.

Cette égalité quantifiée permet d'affirmer que la suite (v_n) est arithmétique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $r = 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}\quad v_n = 1+n$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}\quad v_n = \mathrm{e}^{u_n}$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_n = \ln(n+1)$.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{1-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$. On donnera le résultat sous forme factorisée.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \mathrm{e}^{1-x^2}\left(1-2x^2\right)$$

On applique la formule de dérivation d'un produit ainsi que la formule de la dérivée de la composée d'une fonction dérivable suivie de la fonction exponentielle.

2°) Compléter la phrase suivante :

$\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est horizontale sont les solutions de l'équation $f'(x) = 0$.
La résolution de cette équation est immédiate.

3°) Compléter sans justifier l'égalité de limite suivante : $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$.

En observant que pour tout réel $x \neq 0 \quad f(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{x} \times \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}}$, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

En + ∞, on rencontre une forme indéterminée du type « 0 × ∞ ».

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2}$$

$$= x\mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-x^2}$$

$$= x\mathrm{e} \times \frac{1}{\mathrm{e}^{x^2}}$$

$$= \frac{1}{x}\mathrm{e} \times \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$$

$$= \frac{\mathrm{e}}{x} \times \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$$

$$= \frac{\mathrm{e}}{x} \times \frac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}}$$

On pose $X = x^2$.

$(x \to +\infty) \Rightarrow (X \to +\infty)$

$\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$ donc, par limite d'une composée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2} = +\infty$.

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^{x^2}}{x^2}}=0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e}{x}=0$.

Donc par limite d'un produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

4°) Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0\,;1]$.

$\dfrac{e-1}{2}$ (un seul résultat en unité d'aire)

Comme la fonction *f* est positive et continue sur l'intervalle $[0\,;1]$, l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0\,;1]$ est donnée par l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x e^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\left[-\frac{1}{2}e^{1-x^2}\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{e}{2}$$
$$=\frac{e-1}{2}$$

III.

On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $z_0=1$ et telle que pour tout entier naturel n, $z_{n+1}=\left(1+\dfrac{i}{\sqrt{3}}\right)z_n$.

Les deux questions sont indépendantes.

1°) Démontrer que pour tout entier naturel *n*, on a : $z_n=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

La relation $\forall n\in\mathbb{N}\quad z_{n+1}=\left(1+\dfrac{i}{\sqrt{3}}\right)z_n$ permet de dire que la suite (z_n) est une suite géométrique de raison $1+\dfrac{i}{\sqrt{3}}$.

De plus, $z_0=1$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad z_n=\left(1+\dfrac{i}{\sqrt{3}}\right)^n$.

On détermine une écriture exponentielle de $1+\dfrac{i}{\sqrt{3}}$.

$$1+\frac{i}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)}{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}\quad z_n=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n$ ce qui donne $\forall n\in\mathbb{N}\quad z_n=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

2°) On se place dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout entier naturel *n*, on note A_n le point d'affixe z_n.

Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{A_nO},\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right)$.

En déduire que pour tout entier naturel *n*, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.

On sait que $\left(\overrightarrow{A_nO},\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right)=\arg\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_O-z_n}\ (2\pi)$.

On commence par calculer $\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_O-z_n}$.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \frac{z_{n+1}-z_n}{z_O-z_n}=\frac{\left(1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)z_n-z_n}{-z_n}$$
$$=\frac{\frac{i}{\sqrt{3}}z_n}{-z_n}$$
$$=-\frac{i}{\sqrt{3}}$$

On a : $-\dfrac{i}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

$$\left(\overrightarrow{A_nO},\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right)=-\frac{\pi}{2}\quad(2\pi)$$

Par suite, $\widehat{\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}} = \dfrac{\pi}{2}$ ce qui signifie que l'angle $\widehat{\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}}$ est droit.

On en déduit que le triangle $\mathrm{O\,A}_n\,\mathrm{A}_{n+1}$ est rectangle en A_n.