TS1

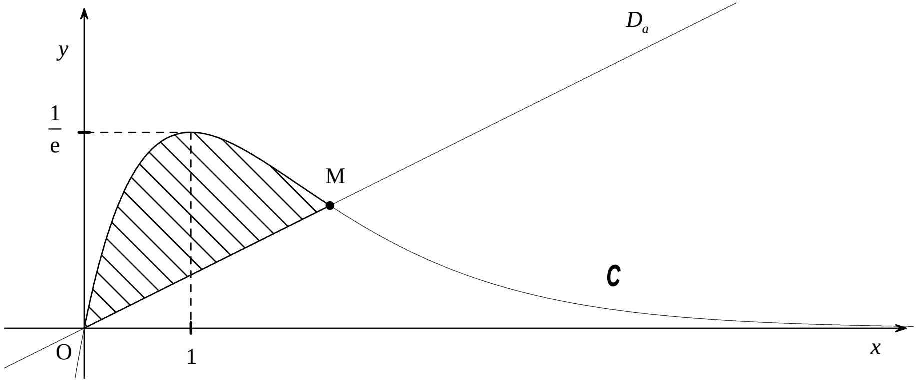
Contrôle du mercredi 3 mai 2017 (4 heures)

Il est demandé de ne rien écrire sur le sujet (en particulier, ne rien marquer sur le graphique).

Partie commune (3 heures)

I. (7 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) a) 2 points ; b) 2 points)

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ dans le plan muni d'un repère orthogonal d'origine O. Pour tout réel a, on note D_a la droite d'équation $y = ax$.



1°) On suppose dans cette question que a est un réel strictement positif distinct de 1.
Déterminer en fonction de a l'abscisse du point d'intersection M de $\mathcal{C}$ et de D_a distinct de O.

2°) On suppose désormais dans toute la suite de l'exercice que $0 < a < 1$.
On note $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessus, c'est-à-dire du domaine compris entre $\mathcal{C}$ et D_a.
On admet que l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{OM}}$ de $\mathcal{C}$ est au-dessus du segment $[\mathrm{OM}]$.

Écrire $\mathcal{A}$ sous la forme d'une intégrale puis justifier que $\mathcal{A} = a\ln a - \dfrac{a(\ln a)^2}{2} + 1 - a$.

On pourra utiliser la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

3°) On considère la fonction $h : x \mapsto x\ln x - \dfrac{x(\ln x)^2}{2} + 1 - x$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

a) Calculer $h'(x)$. On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.
Faire un tableau comprenant l'étude du signe de $h'(x)$ et les variations de h sur $]0\,;+\infty[$.
On admet que $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 1$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$. Compléter le tableau avec ces limites.

b) Justifier qu'il existe un unique réel $a \in]0\,;1[$ tel que $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}$ et déterminer à l'aide de la calculatrice, sans justifier, la valeur arrondie au millième de a.

II. (3 points : 1°) 1 point + 1 point ; 2°) 1 point)

1°) Soit a un réel non nul. On considère les fonctions $u : x \mapsto \mathrm{e}^{x+a\mathrm{e}^x}$ et $v : x \mapsto \mathrm{e}^{2x+a\mathrm{e}^x}$ définies sur $\mathbb{R}$.

- En observant que pour tout réel x, on a : $u(x) = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{a\mathrm{e}^x}$, déterminer l'expression d'une primitive U de u sur $\mathbb{R}$.
- En observant que pour tout réel x, on a : $v(x) = \dfrac{1}{a}\left[\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{a\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^x \times \left(a\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{a\mathrm{e}^x}\right)\right] - \dfrac{1}{a}u(x)$, déterminer l'expression d'une primitive V de v sur $\mathbb{R}$.

2°) On considère la fonction $f : x \mapsto \left(\mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x} + 1\right)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Utiliser les résultats précédents afin de déterminer l'expression d'une primitive F sur $\mathbb{R}$.

III. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point + 1 point ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point)

À tout entier naturel $n \geqslant 1$ on associe la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{(n-1)x}}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

On ne cherchera pas à exprimer u_n en fonction de n.

On pourra utiliser l'égalité suivante après l'avoir démontrée au brouillon : $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ pour tout réel x.

1°) Calculer la valeur exacte de u_1.

2°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-nx}$.
En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

4°) À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel $n \geqslant 1$ tel que $u_n \leqslant 10^{-2}$.

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $z_0 = 2 + \mathrm{i}$ et telle que pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)\overline{z_n}$.

Déterminer la nature de la suite $(|z_n|)$. Répondre en justifiant succinctement.
Déterminer les entiers naturels n tels que $|z_n| \geqslant 10^{20}$. Répondre par une phrase sans justifier.

2°) Déterminer une écriture exponentielle du nombre complexe $\sqrt{3} + \mathrm{i}$. Écrire l'égalité sans justifier après recherche au brouillon.

Le nombre $\left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)^{2016}$ est-il réel ? Répondre en justifiant à l'aide de l'écriture exponentielle déterminée précédemment.

Prénom : …………………………………..… **Nom :** ……………………………………………… **Note : ……..**

I. (7 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) a) 2 points ; b) 2 points)

1°) ……………………………………… (une seule égalité sans justifier)

2°) ………………………………………………………………… (égalité à l'aide d'une intégrale ; calculs ensuite)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

3°) a) ………

……

……

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
Signe de $h'(x)$	
Variations de h	

b) ……

……

……

……

……

……

……

II. (3 points : 1°) 1 point + 1 point ; 2°) 1 point)

1°) ………………………………………………………………………………… (une seule égalité pour U)

………………………………………………………………………………… (une seule égalité pour V)

2°) ……………………………………………………………… (une seule égalité pour F sans justifier)

III. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point + 1 point ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point)

1°) ………………………………… (une seule égalité sans justifier)

2°) ………

……

……

……

……

……

3°) ………

……

……

……

……

……

……

4°) ………….. (une seule réponse sans faire de phrase)

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) ………

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

2°) ………

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

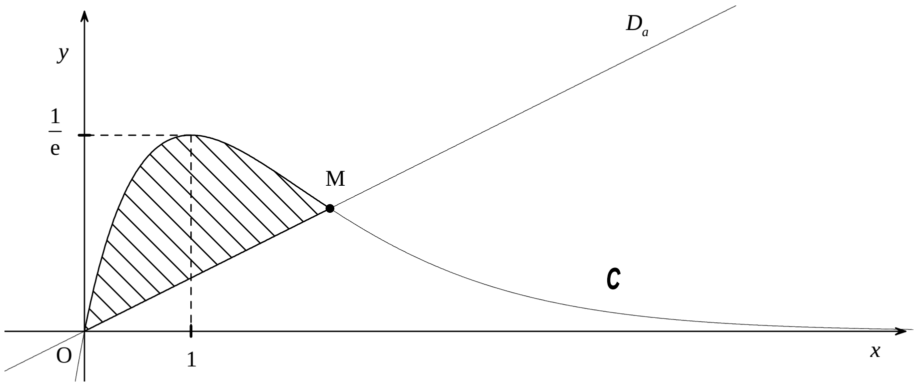
……

……

Corrigé du contrôle du 3-5-2017

I.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ dans le plan muni d'un repère orthogonal d'origine O. Pour tout réel a, on note D_a la droite d'équation $y = ax$.



1°) On suppose dans cette question que a est un réel strictement positif distinct de 1.
Déterminer en fonction de a l'abscisse du point d'intersection M de $\mathcal{C}$ et de D_a distinct de O.

L'abscisse de M est la solution non nulle de l'équation $f(x) = ax \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow x\mathrm{e}^{-x} = ax$$

$$\Leftrightarrow x\left(\mathrm{e}^{-x} - a\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^{-x} - a = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^{-x} = a$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\ln a \quad (\text{car } a > 0 \text{ par hypothèse})$$

On en déduit que l'abscisse de M est égale à $-\ln a$.

2°) On suppose désormais dans toute la suite de l'exercice que $0 < a < 1$.
On note $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessus, c'est-à-dire du domaine compris entre $\mathcal{C}$ et D_a.
On admet que l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{OM}}$ de $\mathcal{C}$ est au-dessus du segment $[\mathrm{OM}]$.

Écrire $\mathcal{A}$ sous la forme d'une intégrale puis justifier que $\mathcal{A} = a\ln a - \dfrac{a(\ln a)^2}{2} + 1 - a$.

On pourra utiliser la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

On vérifie tout d'abord immédiatement que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + (-x-1) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$$

$$= -\mathrm{e}^{-x} + (x+1) \times \mathrm{e}^{-x}$$

$$= x\mathrm{e}^{-x}$$

$$= f(x)$$

F est donc bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{A} = \int_0^{-\ln a} \left[f(x) - ax \right] \mathrm{d}x \quad (\text{on se place sur l'intervalle } [0\,;-\ln a]\text{ ; comme } 0 < a < 1, \text{ on a : } -\ln a > 0)$$

$$= \left[\mathrm{F}(x) - \frac{ax^2}{2} \right]_0^{-\ln a}$$

$$= \left[\mathrm{F}(-\ln a) - \frac{a \times (-\ln a)^2}{2} \right] - \left[\mathrm{F}(0) - \frac{a \times 0^2}{2} \right]$$

$$= \left[(\ln a - 1)\mathrm{e}^{\ln a} - \frac{a \times (\ln a)^2}{2} \right] - \left[(-0-1)\mathrm{e}^{-0} - 0 \right]$$

$$= \left[(\ln a - 1) \times a - \frac{a \times (\ln a)^2}{2} \right] + 1$$

$$= a\ln a - a - \frac{a \times (\ln a)^2}{2} + 1$$

$$= a\ln a - \frac{a(\ln a)^2}{2} + 1 - a$$

Autre méthode :

Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.

$\mathcal{A}$ = aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[0\,;-\ln a]$ – aire du triangle OHM

3°) On considère la fonction $h : x \mapsto x\ln x - \dfrac{x(\ln x)^2}{2} + 1 - x$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

a) Calculer $h'(x)$. On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

Faire un tableau comprenant l'étude du signe de $h'(x)$ et les variations de h sur $]0\,;+\infty[$.

On admet que $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 1$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$. Compléter le tableau avec ces limites.

$\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[\quad h'(x) = \ln x \cancel{+1} - \dfrac{1}{2}\left[1 \times (\ln x)^2 + \cancel{x} \times \dfrac{2}{\cancel{x}} \times \ln x\right] \cancel{-1}$

$$= \ln x - \frac{(\ln x)^2}{2} - \ln x$$

$$= -\frac{(\ln x)^2}{2}$$

x	0		1		$+\infty$
Signe de $h'(x)$	‖	$-$	0	$-$	
Variations de h	‖ 1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

• On vérifie évidemment ce tableau de variations en traçant la représentation graphique de h sur l'écran de la calculatrice.

• En remarquant que $\forall a \in \left]0\,;1\right[\quad \mathcal{A} = h(a)$, on peut vérifier que le sens de variation de h sur $\left]0\,;1\right[$ est cohérent avec l'observation graphique. En effet, on observe que lorsque a augmente entre 0 et 1 (valeurs non comprises) l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré diminue.

b) Justifier qu'il existe un unique réel $a \in \left]0\,;1\right[$ tel que $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}$ et déterminer à l'aide de la calculatrice, sans justifier, la valeur arrondie au millième de a.

On observe que $\forall a \in \left]0\,;1\right[\quad \mathcal{A} = h(a)$.

On va appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans sa version généralisée en vérifiant d'abord les 3 conditions C_1, C_2, C_3.

C_1 : D'après son expression, la fonction h est continue sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ donc, par restriction, sur l'intervalle $\left]0\,;1\right[$.

C_2 : D'après la question précédente, la fonction h est strictement décroissante $\left]0\,;+\infty\right[$ donc, par restriction, sur l'intervalle $\left]0\,;1\right[$.

C_3 : Les limites de h aux bornes de l'intervalle $\left]0\,;1\right[$ sont : $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = 0$. On a bien $\dfrac{1}{2} \in \left]0\,;1\right[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $a \in \left]0\,;1\right[$ tel que $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}$.

On trace la courbe représentative de la fonction h sur l'écran de la calculatrice en utilisant une fenêtre graphique bien adaptée (en gros, avec x et y compris entre 0 et 1).
On utilise ensuite la commande permettant de déterminer les coordonnées des points d'intersection de deux courbes.
Grâce à la calculatrice, on obtient $a = 0{,}068971...$. La valeur arrondie au millième de a est donc 0,069.

II.

1°) Soit a un réel non nul. On considère les fonctions $u : x \mapsto \mathrm{e}^{x+a\mathrm{e}^x}$ et $v : x \mapsto \mathrm{e}^{2x+a\mathrm{e}^x}$ définies sur $\mathbb{R}$.

• En observant que pour tout réel x, on a : $u(x) = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{a\mathrm{e}^x}$, déterminer l'expression d'une primitive U de u sur $\mathbb{R}$.

• En observant que pour tout réel x, on a : $v(x) = \dfrac{1}{a}\left[\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{a\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^x \times \left(a\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{a\mathrm{e}^x}\right)\right] - \dfrac{1}{a}u(x)$, déterminer l'expression d'une primitive V de v sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\mathrm{U}(x) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{a\mathrm{e}^x} \text{ (une seule égalité)}}$$

Justification :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x) = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{a\mathrm{e}^x}$

On considère la fonction $\varphi : x \mapsto a\mathrm{e}^x$.

On effectue la réécriture : $u(x) = \dfrac{1}{a}\varphi'(x) \times \mathrm{e}^{\varphi(x)}$.

Une primitive de u sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction U définie par $\mathrm{U}(x) = \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{\varphi(x)}$ c'est-à-dire $\mathrm{U}(x) = \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{a\mathrm{e}^x}$.

$$\boxed{\mathrm{V}(x) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{x+a\mathrm{e}^x} - \frac{1}{a^2}\mathrm{e}^{a\mathrm{e}^x} \text{ (une seule égalité)}}$$

Justification :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad v(x) = \dfrac{1}{a}\left[\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{a\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^x \times \left(a\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{a\mathrm{e}^x}\right)\right] - \dfrac{1}{a}u(x)$

On considère la fonction $\psi : x \mapsto \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{a\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^x \times \left(a\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{a\mathrm{e}^x}\right)$.
On reconnaît une forme du type $f'g + fg'$.
Une primitive de ψ sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction Ψ définie par $\Psi(x) = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{a\mathrm{e}^x}$.

On peut écrire $v(x) = \dfrac{1}{a}\psi(x) - \dfrac{1}{a}u(x)$.

Une primitive de v sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction V définie par $\mathrm{V}(x) = \dfrac{1}{a}\Psi(x) - \dfrac{1}{a}\mathrm{U}(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{V}(x) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{a\mathrm{e}^{x}} - \frac{1}{a}\mathrm{U}(x)$

$= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{x+a\mathrm{e}^{x}} - \frac{1}{a^2}\mathrm{e}^{a\mathrm{e}^{x}}$

2°) On considère la fonction $f : x \mapsto \left(\mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^{x}}+1\right)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Utiliser les résultats précédents afin de déterminer l'expression d'une primitive F sur $\mathbb{R}$.

On commence par développer l'expression de *f*.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \left(\mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^{x}}\right)^2 + 2\mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^{x}} + 1$

$= \mathrm{e}^{2x+2\mathrm{e}^{x}} + 2\mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^{x}} + 1$

On détermine ensuite une primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^{x}}$ grâce à la fonction *u* pour $a=1$ et une primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{2x+2\mathrm{e}^{x}}$ grâce à la fonction *v* pour $a=2$.

On peut ainsi donner l'expression d'une primitive F de *f* sur $\mathbb{R}$: $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x+2\mathrm{e}^{x}} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\mathrm{e}^{x}} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x}} + x$.

III.

À tout entier naturel $n \geqslant 1$ on associe la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{\mathrm{e}^{nx}+\mathrm{e}^{(n-1)x}}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on pose $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

On ne cherchera pas à exprimer u_n en fonction de *n*.

On pourra utiliser l'égalité suivante après l'avoir démontrée au brouillon : $f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ pour tout réel *x*.

1°) Calculer la valeur exacte de u_1.

$u_1 = \int_0^1 f_1(x)\;\mathrm{d}x$

$= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\;\mathrm{d}x$ (on utilise l'expression « transformée » de f_n pour $n=1$)

$= \left[-\ln\left|1+\mathrm{e}^{-x}\right|\right]_0^1$

$= \left[-\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\right]_0^1$ (les barres de valeur absolue n'ont pas d'intérêt car la quantité entre les barres est strictement positive)

$= -\ln\left(1+\mathrm{e}^{-1}\right) + \ln\left(1+\mathrm{e}^{0}\right)$

$= \ln 2 - \ln\left(1+\mathrm{e}^{-1}\right)$

On peut aussi écrire $u_1 = \ln\frac{2\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}$.

2°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

On fixe un entier naturel $n \geqslant 1$.

On a alors : $n \leqslant n+1$.

Pour $x \in [0\,;1]$, on peut écrire les inégalités successives suivantes :

$nx \leqslant (n+1)x$ car *x* étant positif, le sens des inégalités ne change pas.

$-nx \geqslant -(n+1)x$

$\mathrm{e}^{-nx} \geqslant \mathrm{e}^{-(n+1)x}$ (croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$)

$\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}} \geqslant \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ (car $1+\mathrm{e}^{-x} > 0$)

$f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$

Une autre méthode consiste à former la différence $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} - \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)$ puis à faire une étude du signe pour $x \in [0\,;1]$.

Les bornes de l'intégrale sont dans le « bon sens » (la « borne du bas » est inférieure ou égale à la « borne du haut ») donc par « croissance de l'intégrale », on a : $\int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} \leqslant u_n$.

On en déduit que la suite (u_n) est décroissante (à partir de l'indice 1).

3°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-nx}$.
En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

1ère méthode :

On fixe un entier naturel $n \geqslant 1$.

$\forall x \in [0\,;1] \quad f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

Or $\forall x \in [0\,;1] \quad 1+\mathrm{e}^{-x} > 1$ donc $\forall x \in [0\,;1] \quad \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} < 1$ et, par conséquent, $\forall x \in [0\,;1] \quad \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}} < \mathrm{e}^{-nx}$.

Ainsi $\forall x\in[0\,;1]\quad f_n(x)<\mathrm{e}^{-nx}$ ce qui démontre le résultat demandé puisqu'une inégalité stricte entraîne une inégalité large.

2[e] méthode :

On fixe un entier naturel $n\geqslant 1$.

$\forall x\in[0\,;1]\quad f_n(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{nx}+\mathrm{e}^{(n-1)x}}$

On a : $\forall x\in[0\,;1]\quad \mathrm{e}^{nx}+\mathrm{e}^{(n-1)x}>\mathrm{e}^{nx}$.

Comme les deux membres de cette inégalité sont strictement positifs, $\forall x\in[0\,;1]\quad \dfrac{1}{\mathrm{e}^{nx}+\mathrm{e}^{(n-1)x}}<\dfrac{1}{\mathrm{e}^{nx}}$ donc $\forall x\in[0\,;1]\quad f_n(x)<\mathrm{e}^{-nx}$.

Il n'est pas possible de trouver la limite de la suite (u_n) directement.
On va démontrer que la limite de la suite est 0.
Attention,

- aucune propriété du cours ne permet de démontrer que la suite (u_n) converge vers 0 ;
- la calculatrice ne permet d'affirmer que la limite de la suite (u_n) est égale à 0.

> On ne peut déduire la limite de u_n directement. Il n'y a aucune propriété dans le cours qui permette de répondre. La calculatrice ne permet pas de conclure. On est obligé de faire toute une démarche.

On va utiliser l'inégalité que l'on vient de démontrer.
Les bornes de l'intégrale sont dans le bon sens (la « borne du bas » est inférieure ou égale à la « borne du haut ») donc par « croissance de l'intégrale », on a : $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$ ce qui donne $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$ (le calcul de l'intégrale de droite est immédiat) ce qui donne $u_n\leqslant\dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$.

De plus, $\forall x\in[0\,;1]\quad f_n(x)\geqslant 0$ (et même avec une inégalité stricte, qui ne sert pas ici).

Donc $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$ (positivité de l'intégrale) soit $u_n\geqslant 0$.

On en déduit que $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad 0\leqslant u_n\leqslant\dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}=0$ (on peut détailler un peu plus)

Donc d'après le théorème des gendarmes, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.

4°) À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel $n\geqslant 1$ tel que $u_n\leqslant 10^{-2}$.

51

On se place en mode fonction (plus rapide). On définit $\mathrm{Y1}=\displaystyle\int_0^1\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{X}*\mathrm{A}}/\left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{A}}\right)\right)\,\mathrm{dA}$.

On dresse un tableau de valeurs pour des valeurs entières positives de X.

D'après la calculatrice, $u_{50}=0{,}0100999800159...$ et $u_{51}=0{,}0099000199840...$

IV.

1°) On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $z_0=2+\mathrm{i}$ et telle que pour tout entier naturel n, $z_{n+1}=\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)\overline{z_n}$.

Déterminer la nature de la suite $\left(|\,z_n\,|\right)$. Répondre en justifiant succinctement.

Déterminer les entiers naturels n tels que $|\,z_n\,|\geqslant 10^{20}$. Répondre par une phrase sans justifier.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad |\,z_{n+1}\,|=\left|\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)\overline{z_n}\right|$

$=\left|\sqrt{3}+\mathrm{i}\right|\times\left|\overline{z_n}\right|$ (propriété du module)

$=2\times|\,z_n\,|$ (car $\left|\sqrt{3}+\mathrm{i}\right|=2$ et $\left|\overline{z_n}\right|=|\,z_n\,|$)

On en déduit que la suite $\left(|\,z_n\,|\right)$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $|\,z_0\,|=\sqrt{5}$.

D'après la formule donnant le terme général d'une suite géométrique, on a : $\forall n\in\mathbb{N}\quad |\,z_n\,|=2^n\times\sqrt{5}$.

On cherche les entiers naturels n tels que $|\,z_n\,|\geqslant 10^{20}\quad(1)$.

$(1)\Leftrightarrow 2^n\times\sqrt{5}\geqslant 10^{20}$

$\Leftrightarrow \ln\left(2^n\times\sqrt{5}\right)\geqslant\ln 10^{20}$

$\Leftrightarrow n\ln 2+\ln\sqrt{5}\geqslant 20\ln 10$

$\Leftrightarrow n\ln 2+\dfrac{1}{2}\ln 5\geqslant 20\ln 10$

$\Leftrightarrow n\geqslant\dfrac{20\ln 10-\dfrac{1}{2}\ln 5}{\ln 2}$ (car $\ln 2>0$)

Avec la calculatrice, on obtient $\dfrac{20\ln 10-\dfrac{1}{2}\ln 5}{\ln 2}=65{,}2775978...$

Les entiers naturels cherchés sont tous les entiers naturels supérieurs ou égaux à 66.

Autre méthode (à éviter) :

On utilise la calculatrice.

$\dfrac{10^{20}}{\sqrt{5}}$ donne l'affichage $4,472135955\times 10^{19}$.

2^{65} donne l'affichage $3,689348815\times 10^{19}$

2^{66} donne l'affichage $7,378697629\times 10^{19}$

2°) Déterminer une écriture exponentielle du nombre complexe $\sqrt{3}+\mathrm{i}$. Écrire l'égalité sans justifier après recherche au brouillon.

Le nombre $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{2016}$ est-il réel ? Répondre en justifiant à l'aide de l'écriture exponentielle déterminée précédemment.

On a : $\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ (résultat facile à obtenir).

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{2016} &= \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^{2016}\\ &= 2^{2016}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2016\times\pi}{6}}\\ &= 2^{2016}\mathrm{e}^{336\mathrm{i}\pi}\\ &= 2^{2016} \text{ (car } \mathrm{e}^{336\mathrm{i}\pi}=1 \text{ d'après la formule } \forall k\in\mathbb{Z}\ \ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi}=1\text{)}\end{aligned}$$

On en déduit que le nombre $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{2016}$ est bien un nombre réel. On peut même préciser que c'est un réel positif.