1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 2 mai 2017 (50 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

Dans tous les exercices, le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) a) 1 point ; b) 1 point)

On considère les points $\text{A}(1\,;-1)$ et $\text{B}(3\,;3)$. On note $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[\text{AB}]$.

1°) Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$. Le modèle de rédaction est donné ci-dessous.
Pour la première ligne (et éventuellement la deuxième ligne), on attend une égalité de produit scalaire sans coordonnées.

Soit M un point quelconque de P de coordonnées $(x\,;y)$.

$\text{M} \in \mathcal{C}$ $\Leftrightarrow$ ……………………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………………………

$\mathcal{C}$ a pour équation cartésienne ………………………………………………………….... .

2°) Déterminer les abscisses des points E et F de $\mathcal{C}$ dont l'ordonnée est égale à 1 (on prendra $x_{\text{E}} < x_{\text{F}}$).

…………………………… …………………………… (écrire deux égalités)

3°) À tout réel m on associe la droite D_m d'équation cartésienne $(m+1)x - my + m - 5 = 0$.

a) Compléter la phrase suivante :

Le vecteur $\vec{u}$ (................ ; ....) est un vecteur directeur de D_m.

b) Pour quelle valeur de m la droite D_m est-elle perpendiculaire à la droite (AB) ?
On rédigera sous la forme d'une chaîne d'équivalences selon le modèle : « $D_m \perp (\text{AB}) \Leftrightarrow$ …. ».

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

II. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point ; 4°) 2 points)

On considère les points $\text{A}(2\,;3)$, $\text{B}(5\,;1)$ et $\text{C}(-4\,;-1)$.

1°) Compléter les lignes suivantes :

$\overrightarrow{\text{AB}}$ (…....; …....) $\overrightarrow{\text{AC}}$ (…....; …....)

$\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} =$ .... (écrire deux étapes de calcul puis le résultat)

2°) Compléter les égalités de distances suivantes :

$\text{AB} =$ .... (un seul résultat) $\text{AC} =$ .... (un seul résultat)

3°) Déduire des questions précédentes le cosinus de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

………………………………………………………………… (une seule égalité)

4°) On note Δ la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

Définir la droite Δ par une phrase rédigée selon le modèle suivant :

« La droite Δ est la droite passant par … et perpendiculaire à ………. ».

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Déterminer une équation cartésienne de Δ.

………

………

………

………

………

………

III. (4 points : 2 points + 2 points)

À tout réel m on associe la courbe $\mathcal{C}_m$ d'équation cartésienne $x^2+y^2-2mx+4y-1=0$.
Démontrer que pour tout réel m la courbe $\mathcal{C}_m$ est un cercle. Préciser les coordonnées de son centre Ω_m.
On complétera le modèle de rédaction ci-dessous.

Soit M un point quelconque de P de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$\text{M}\in\mathcal{C}_m \Leftrightarrow x^2+y^2-2mx+4y-1=0$

$\Leftrightarrow$ ………………………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ………………………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ………………………………………………………………

………

………

………

………

………

IV. (4 points)

Soit $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y=x^2$ et A un point quelconque de $\mathcal{C}$ d'abscisse $a\neq 0$.
La perpendiculaire à (OA) passant par O recoupe $\mathcal{C}$ en un point B.
Calculer les coordonnées de B en fonction de a.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 2-5-2017

I.

On considère les points $\mathrm{A}(1\,;-1)$ et $\mathrm{B}(3\,;3)$. On note $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[\mathrm{AB}]$.

1°) Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$. Le modèle de rédaction est donné ci-dessous.
Pour la première ligne (et éventuellement la deuxième ligne), on attend une égalité de produit scalaire sans coordonnées.

Soit M un point quelconque de P de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$\mathrm{M} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$ (ligne sans coordonnées, faire un graphique pour comprendre)

$\Leftrightarrow \left(-\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right) = 0$ (ligne sans coordonnées)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BM}} = 0$ (ligne sans coordonnées)

$\Leftrightarrow (x-1)\times(x-3)+(y+1)\times(y-3)=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-2y=0$

$\mathcal{C}$ a pour équation cartésienne $x^2+y^2-4x-2y=0$.

Il est conseillé de vérifier que ${x_\mathrm{A}}^2+{y_\mathrm{A}}^2-4x_\mathrm{A}-2y_\mathrm{A}=0$ et ${x_\mathrm{B}}^2+{y_\mathrm{B}}^2-4x_\mathrm{B}-2y_\mathrm{B}=0$ (calculs immédiats).

2°) Déterminer les abscisses des points E et F de $\mathcal{C}$ dont l'ordonnée est égale à 1 (on prendra $x_\mathrm{E} < x_\mathrm{F}$).

$2+\sqrt{5}$ $\qquad$ $2-\sqrt{5}$ $\qquad$ (écrire deux égalités)

On utilise l'équation cartésienne de $\mathcal{C}$ trouvée précédemment.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ dont l'ordonnée est égale à 1 sont les solutions de l'équation $x^2+1^2-4x-2\times1=0$ soit $x^2-4x-1=0$ (on remplace y par 1 dans l'équation cartésienne de $\mathcal{C}$).
Les solutions de cette équation sont $2+\sqrt{5}$ et $2-\sqrt{5}$ (utiliser le discriminant réduit).

3°) À tout réel m on associe la droite D_m d'équation cartésienne $(m+1)x-my+m-5=0$.

a) Compléter la phrase suivante :

Le vecteur $\vec{u}\,(m\,;m+1)$ est un vecteur directeur de D_m.

b) Pour quelle valeur de m la droite D_m est-elle perpendiculaire à la droite (AB) ?
On rédigera sous la forme d'une chaîne d'équivalences selon le modèle : « $D_m \perp (\mathrm{AB}) \Leftrightarrow$ …. ».

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(2\,;4)$

$D_m \perp (\mathrm{AB}) \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont orthogonaux

$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$

$\Leftrightarrow 2\times m+4\times(m+1)=0$

$\Leftrightarrow m+2(m+1)=0$

$\Leftrightarrow 3m+2=0$

$\Leftrightarrow m=-\dfrac{2}{3}$

II.

On considère les points $\mathrm{A}(2\,;3)$, $\mathrm{B}(5\,;1)$ et $\mathrm{C}(-4\,;-1)$.

1°) Compléter les lignes suivantes :

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(3\,;-2)$ $\qquad$ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,(-6\,;-4)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 3\times(-6)+(-2)\times(-4)=-18+8=-10$ (écrire deux étapes de calcul puis le résultat)

2°) Compléter les égalités de distances suivantes :

$\mathrm{AB}=\sqrt{13}$ (un seul résultat) $\qquad$ $\mathrm{AC}=2\sqrt{13}$ (un seul résultat)

3°) Déduire des questions précédentes le cosinus de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$\cos\widehat{\mathrm{BAC}}=-\dfrac{5}{13}$ (une seule égalité)

$$\cos\widehat{\mathrm{BAC}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}}=-\frac{10}{\sqrt{13}\times2\sqrt{13}}=-\frac{10}{2\times13}=-\frac{5}{13}$$

4°) On note Δ la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

Définir la droite Δ par une phrase rédigée selon le modèle suivant :

« La droite Δ est la droite passant par … et perpendiculaire à ………. ».

La droite Δ est la droite passant par C et perpendiculaire à (AB).

Déterminer une équation cartésienne de Δ.

Soit M un point quelconque de P de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$\text{M} \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{AB}} \bullet \overrightarrow{\text{CM}} = 0$ (1^ère^ ligne sans coordonnées ; on peut aussi écrire $\overrightarrow{\text{BA}} \bullet \overrightarrow{\text{CM}} = 0$ ou $\overrightarrow{\text{AB}} \bullet \overrightarrow{\text{MC}} = 0$ …)

$\Leftrightarrow 3\times(x+4)+(-2)\times(y+1)=0$ (on utilise les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ calculées à la question 1°)

$\Leftrightarrow 3x-2y+10=0$

Δ a pour équation cartésienne $3x-2y+10=0$.

III.

À tout réel m on associe la courbe $\mathcal{C}_m$ d'équation cartésienne $x^2+y^2-2mx+4y-1=0$.
Démontrer que pour tout réel m la courbe $\mathcal{C}_m$ est un cercle. Préciser les coordonnées de son centre Ω_m.
On complétera le modèle de rédaction ci-dessous.

Soit M un point quelconque de P de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$\text{M} \in \mathcal{C}_m \Leftrightarrow x^2+y^2-2mx+4y-1=0$

$\Leftrightarrow x^2-2mx+y^2+4y-1=0$

$\Leftrightarrow (x-m)^2-m^2+(y+2)^2-4-1=0$

$\Leftrightarrow (x-m)^2+(y+2)^2=m^2+5$

$\forall m \in \mathbb{R}\ \ m^2+5>0$ donc $\mathcal{C}_m$ est le cercle de centre $\Omega_m\,(m\,;-2)$ et de rayon $\sqrt{m^2+5}$.

IV.

Soit $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y=x^2$ et A un point quelconque de $\mathcal{C}$ d'abscisse $a \neq 0$.
La perpendiculaire à (OA) passant par O recoupe $\mathcal{C}$ en un point B.
Calculer les coordonnées de B en fonction de a.

On peut faire un graphique.

Comme $\text{A} \in \mathcal{C}$, $\text{A}(a\,;\,a^2)$.

Soit b l'abscisse de B.

On a : $\overrightarrow{\text{OA}} \bullet \overrightarrow{\text{OB}} = 0$ (1).

$(1) \Leftrightarrow ab+a^2b^2=0$

$\Leftrightarrow b+ab^2=0$ (car $a \neq 0$)

$\Leftrightarrow b(1+ab)=0$

$\Leftrightarrow b=0$ ou $1+ab=0$

$\Leftrightarrow b=0$ ou $b=-\dfrac{1}{a}$

Or $\text{B} \neq \text{O}$ donc $b \neq 0$.

On en déduit que B a pour abscisse $-\dfrac{1}{a}$.

Comme $\text{B} \in \mathcal{C}$, l'ordonnée de B est donnée par $y_{\text{B}} = {x_{\text{B}}}^2 = \left(-\dfrac{1}{a}\right)^2 = \dfrac{1}{a^2}$.

Ainsi $\text{B}\left(-\dfrac{1}{a}\,;\dfrac{1}{a^2}\right)$.