1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 25 avril 2017 (50 minutes)

Prénom et nom : …………………………..……………………………………

Note : ….. / 20

I. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points + 2 points)

On considère les suites (u_n), (v_n), (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3^{n+1} - 3^n$, $v_n = 3^n \times 3^{n+1}$ et $w_n = 3^{n+1} \times (-3)^n$.

1°) Démontrer que u_n peut s'écrire sous la forme $u_n = \ldots \times 3^n$ où les pointillés seront remplacés par un réel à définir.
On présentera les calculs en trois étapes dans la colonne de gauche ci-dessous.
En déduire que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3^{n+1} - 3^n$	
$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	………………………………………………………………
$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	………………………………………………………………
$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	………………………………………………………………

2°) Démontrer que les suites (v_n) et (w_n) sont géométriques. Préciser leurs premiers termes et leurs raisons.

…………………………………………………………………..……………………………………………

…………………………………………………………………..……………………………………………

…………………………………………………………………..……………………………………………

…………………………………………………………………..……………………………………………

…………………………………………………………………..……………………………………………

…………………………………………………………………..……………………………………………

…………………………………………………………………..……………………………………………

…………………………………………………………………..……………………………………………

II. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point + 1 point)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -3$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + 2n - 2$ pour tout entier naturel *n*. Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = u_n + 2n$.
Le but de l'exercice est d'exprimer u_n en fonction de *n*.
Calculer au brouillon u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 puis v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Conjecturer la nature de la suite (v_n).

1°) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier naturel *n*.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = u_{n+1} + 2(n+1)$

$=$

$=$

$=$

$=$

2°) Recopier et compléter la phrase suivante donnant la nature de la suite (v_n) ainsi que toutes les précisions utiles.
« D'après la question précédente, la suite (v_n) est une suite … ».

……………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………

3°) Exprimer v_n en fonction de *n*. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

……………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………

III. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Soit (u_n) une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ telle que $u_1 = 11$ et $u_4 = 5$.

1°) Calculer u_{2017}.

…………………….…………………..… (une seule égalité)

2°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

Exprimer S_n en fonction de *n*. On donnera le résultat sous forme factorisée la plus simple possible.

$\forall n \in \mathbb{N}$ ………………………………………… (une seule égalité)

IV. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Soit (u_n) la suite des entiers naturels dont le chiffre des unités est égal à 3 : $u_0 = 3$, $u_1 = 13$, $u_2 = 23$, $u_3 = 33$...

1°) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Exprimer u_n en fonction de *n*.

…………………………………………………………………..……………………………………………….

…………………………………………………………………..……………………………………………….

$\forall n \in \mathbb{N}$ ……………………………… (une seule égalité)

2°) Calculer la somme de tous les entiers naturels inférieurs à 1000 dont le dernier chiffre est égal à 3.
Écrire le calcul sur les lignes ci-dessous.

……………………………………..… (un seul résultat sans égalité)

……………………………………………………..……………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………

V. (2 points)

Jacques souhaite calculer la somme d'argent totale qu'il gagnera durant sa carrière s'il continue dans la même société que celle où il a débuté.
Il a commencé avec un salaire annuel de 15 000 €.

1°) On suppose que le salaire est revalorisé de 3 % tous les ans.
Quelle somme totale aura-t-il perçue au bout de 42 ans de carrière ? On donnera la valeur arrondie à l'unité.

………………………………(un seul résultat, sans égalité)

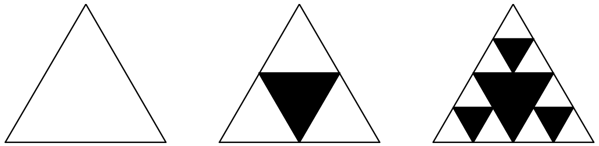
2°) **Bonus (1 point)**

On suppose que le salaire est revalorisé de 3 % tous les deux ans. On précise que les deux premières années le salaire annuel est de 15 000 € et que la revalorisation de 3 % entre en vigueur à partir de la troisième année.
Quelle somme totale aura-t-il perçue au bout de 42 ans de carrière ? On donnera la valeur arrondie à l'unité.

………………………………(un seul résultat, sans égalité)

VI. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On partage un triangle équilatéral en quatre triangles équilatéraux obtenus en traçant les segments joignant les milieux des côtés et on noircit le triangle central. Chaque triangle non noirci est alors divisé en quatre triangles équilatéraux selon le même procédé et on noircit le triangle central comme précédemment.



Triangle initial Étape 1 Étape 2

On note u_n le nombre de triangles noircis $\boxed{\text{rajoutés}}$ à l'étape *n* où *n* est un entier supérieur ou égal à 1.
Ainsi on a $u_1 = 1$.

1°) Recopier et compléter la phrase suivante concernant la nature de la suite (u_n).

« La suite (u_n) est une suite …………………………... » (ne rien écrire sur les pointillés)

…………………………………………………………..……………………………………………….

2°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note A_n le nombre $\boxed{\text{total}}$ de triangles noircis après l'étape *n*.
Exprimer A_n en fonction de *n*.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ …………………………………… (une seule égalité)

Corrigé du contrôle du 25-4-2017

I.

On considère les suites (u_n), (v_n), (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3^{n+1} - 3^n$, $v_n = 3^n \times 3^{n+1}$ et $w_n = 3^{n+1} \times (-3)^n$.

1°) Démontrer que u_n peut s'écrire sous la forme $u_n = \ldots \times 3^n$ où les pointillés seront remplacés par un réel à définir.
On présentera les calculs en trois étapes dans la colonne de gauche ci-dessous.
En déduire que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3^{n+1} - 3^n$

$= 3 \times 3^n - 3^n$ (on décompose 3^{n+1})

$= 3^n \times (3-1)$ (on factorise)

$= 2 \times 3^n$ (on obtient un résultat)

On en déduit que la suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3.

2°) Démontrer que les suites (v_n) et (w_n) sont géométriques. Préciser leurs premiers termes et leurs raisons.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 3^n \times 3^{n+1}$

$= 3^n \times 3^n \times 3$

$= (3 \times 3)^n \times 3$

$= 3 \times 9^n$

On en déduit que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison 9.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = 3^{n+1} \times (-3)^n$

$= 3^n \times 3 \times (-3)^n$

$= (3 \times (-3))^n \times 3$

$= 3 \times (-9)^n$

On en déduit que la suite (w_n) est une suite géométrique de premier terme $w_0 = 3$ et de raison -9.

II.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -3$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + 2n - 2$ pour tout entier naturel n. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n + 2n$.
Le but de l'exercice est d'exprimer u_n en fonction de n.
Calculer au brouillon u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 puis v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Conjecturer la nature de la suite (v_n).

$u_1 = -8$, $u_2 = -16$, $u_3 = -30$, $u_4 = -56$, $u_5 = -106$
$v_0 = -3$, $v_1 = -6$, $v_2 = -12$, $v_3 = -24$, $v_4 = -48$, $v_5 = -96$

On peut conjecturer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

1°) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier naturel n.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} &= u_{n+1} + 2(n+1)\\ &= u_{n+1} + 2n + 2\\ &= 2u_n + 2n - 2 + 2n + 2\\ &= 2u_n + 4n\\ &= 2v_n\end{aligned}$$

2°) Recopier et compléter la phrase suivante donnant la nature de la suite (v_n) ainsi que toutes les précisions utiles.
« D'après la question précédente, la suite (v_n) est une suite … ».

D'après la question précédente, la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = -3$ et de raison 2.

3°) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = -3 \times 2^n$

Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + 2n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n - 2n$.

Finalement, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -3 \times 2^n - 2n$.

III.

Soit (u_n) une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ telle que $u_1 = 11$ et $u_4 = 5$.

1°) Calculer u_{2017}.

$u_{2017} = -\,4021$ (une seule égalité)

Soit r la raison de la suite (u_n).

On a $u_4 = u_1 + 3r$ d'où $5 = 11 + 3r$ ce qui donne $r = -\,2$.

$$u_{2017} = u_1 - 2 \times (2017 - 1)$$
$$= 11 - 2 \times 2016$$
$$= -\,4021$$

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

Exprimer S_n en fonction de n. On donnera le résultat sous forme factorisée la plus simple possible.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = (n+1)(13-n)$ (une seule égalité)

On commence par calculer u_0 : $u_0 = u_1 - r = 11 + 2 = 13$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = u_0 + u_2 + ... + u_n$

$= (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$ (formule de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique ; la somme comporte n termes)

$$= (n+1) \times \frac{13 + 13 - 2n}{2}$$
$$= (n+1)(13-n)$$

IV.

Soit (u_n) la suite des entiers naturels dont le chiffre des unités est égal à 3 : $u_0 = 3$, $u_1 = 13$, $u_2 = 23$, $u_3 = 33$...

1°) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Exprimer u_n en fonction de n.

Chaque terme de la suite, sauf le premier, s'obtient en ajoutant 10 au précédent.
La suite (u_n) est donc une suite arithmétique de raison 10.

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 3 + 10n$ (une seule égalité)

2°) Calculer la somme de tous les entiers naturels inférieurs à 1000 dont le dernier chiffre est égal à 3.
Écrire le calcul sur les lignes ci-dessous.

49 800 (un seul résultat sans égalité)

On cherche à calculer $S = 3 + 13 + 23 + ... + 993$.

Il faut déterminer d'abord déterminer l'entier naturel n tel que $u_n = 993$. On trouve immédiatement $n = 99$.
Ainsi, $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{99}$.

En appliquant la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique, on obtient :

$$S = 100 \times \frac{u_0 + u_{99}}{2}$$
$$= 100 \times \frac{3 + 993}{2}$$
$$= 100 \times \frac{996}{2}$$
$$= 100 \times 498$$
$$= 49800$$

V.

Jacques souhaite calculer la somme d'argent totale qu'il gagnera durant sa carrière s'il continue dans la même société que celle où il a débuté.
Il a commencé avec un salaire annuel de 15 000 €.

1°) On suppose que le salaire est revalorisé de 3 % tous les ans.
Quelle somme totale aura-t-il perçue au bout de 42 ans de carrière ? On donnera la valeur arrondie à l'unité.

1 230 348 € (un seul résultat, sans égalité)

1$^{\text{ère}}$ méthode : utilisation d'une suite

① Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n le salaire annuel en euro perçu par Jacques la n-ième année.

② D'après l'énoncé, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = 1,03 u_n$.

La suite (u_n) est donc une suite géométrique définie sur $\mathbb{N}^*$ de premier terme $u_1 = 15\,000$ et de raison 1,03.

③ On note S la somme totale en euros perçue au bout de 42 ans de carrière.

$$S = u_1 + u_2 + ... + u_{42}$$

$$= 15\,000 \times \frac{1,03^{42} - 1}{1,03 - 1}$$

$$= 1\,230\,347,94...$$

2$^{\text{e}}$ méthode : on utilise un programme sur calculatrice (avec une boucle « Pour »).

2°) **Bonus**

On suppose que le salaire est revalorisé de 3 % tous les deux ans. On précise que les deux premières années le salaire annuel est de 15 000 € et que la revalorisation de 3 % entre en vigueur à partir de la troisième année. Quelle somme totale aura-t-il perçue au bout de 42 ans de carrière ? On donnera la valeur arrondie à l'unité.

860 295 €

On note S' la somme totale en euros perçue au bout de 42 ans de carrière.

On peut effectuer la somme totale perçue au bout de 21 ans et multiplier le résultat par 2.

$$S = 2\left(u_1 + u_2 + ... + u_{21}\right)$$

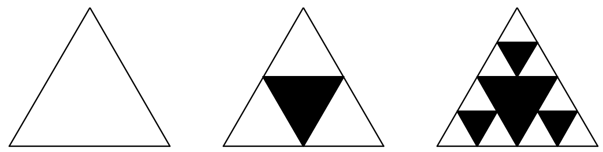
$$= 2 \times 15\,000 \times \frac{1,03^{21} - 1}{1,03 - 1}$$

$$= 860294,571...$$

Attention, une idée serait de diviser en deux les 3 % c'est-à-dire de considérer qu'il y a une augmentation de 1,5 % par an. Ce raisonnement est faux. Par exemple, une augmentation de 5 % sur 5 ans ne correspond pas à une augmentation annuelle de 1 %.

VI.

On partage un triangle équilatéral en quatre triangles équilatéraux obtenus en traçant les segments joignant les milieux des côtés et on noircit le triangle central. Chaque triangle non noirci est alors divisé en quatre triangles équilatéraux selon le même procédé et on noircit le triangle central comme précédemment.



Triangle initial — Étape 1 — Étape 2

On note u_n le nombre de triangles noircis $\boxed{\text{rajoutés}}$ à l'étape n où n est un entier supérieur ou égal à 1.
Ainsi on a $u_1 = 1$.

1°) Recopier et compléter la phrase suivante concernant la nature de la suite (u_n).

« La suite (u_n) est une suite …………………………... » (ne rien écrire sur les pointillés)

La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_1 = 1$ et de raison 3.

2°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note A_n le nombre $\boxed{\text{total}}$ de triangles noircis après l'étape n.
Exprimer A_n en fonction de n.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{A}_n = \frac{3^n - 1}{2} \text{ (une seule égalité)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{A}_n = u_1 + u_2 + ... + u_n \quad \left(\text{ou } \mathrm{A}_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k\right)$$

$$= u_1 \times \frac{3^n - 1}{3 - 1}$$ (formule de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique ; la somme comporte n termes)

$$= 1 \times \frac{3^n - 1}{2}$$

$$= \frac{3^n - 1}{2}$$