TS1

Contrôle du vendredi 21 avril 2017 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..……………

Note : …….. **/ 20**

I. (6 points)

On pose $\mathrm{I}_1=\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(2x^3-3x^2+5x+1\right)\,\mathrm{d}x$; $\mathrm{I}_2=\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{(1-2\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$; $\mathrm{I}_3=\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\mathrm{e}^{\sin x}}\,\mathrm{d}x$.

Pour le calcul de I_3, on observera que $\dfrac{\cos x}{1+\mathrm{e}^{\sin x}}=\dfrac{\cos x\times\mathrm{e}^{-\sin x}}{1+\mathrm{e}^{-\sin x}}$ pour tout réel x.

Compléter les égalités suivantes puis détailler succinctement le calcul de chacune des intégrales en trois ou quatre lignes.

$\mathrm{I}_1=$ …………… ; $\mathrm{I}_2=$ …………… ; $\mathrm{I}_3=$ ……………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

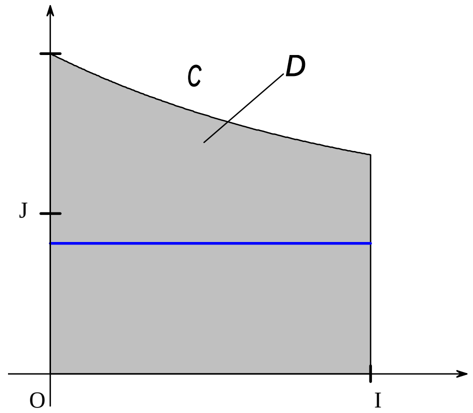
………

………

………

II. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 1+\mathrm{e}^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(\mathrm{O, I, J})$ du plan. On considère le domaine $\mathcal{D}$ du plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$, d'autre part entre les droites d'équations $x=0$ et $x=1$. La courbe $\mathcal{C}$ et le domaine $\mathcal{D}$ sont représentés ci-dessous.



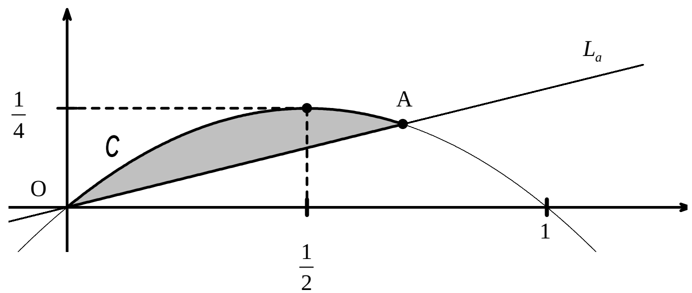
(ne rien écrire sur ce graphique)

On se propose de partager le domaine $\mathcal{D}$ en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y=a$ où a est un réel compris entre 0 et 1.
Déterminer la valeur exacte du réel a.

…………………………….. (une seule égalité)

III. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto x-x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan d'origine O.
À tout réel a, on fait correspondre la droite L_a d'équation $y=ax$.



(ne rien écrire sur ce graphique)

1°) On note A le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de L_a autre que O lorsque $a \neq 1$.
Exprimer l'abscisse de A en fonction de *a*.

…………………………………. (une seule égalité)

2°) Dans cette question, on suppose que $0 \leqslant a < 1$.
Exprimer en fonction de *a* l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$ et la droite L_a (en unité d'aire).

…………………………………. (une seule égalité)

3°) **Question bonus (1 point)**

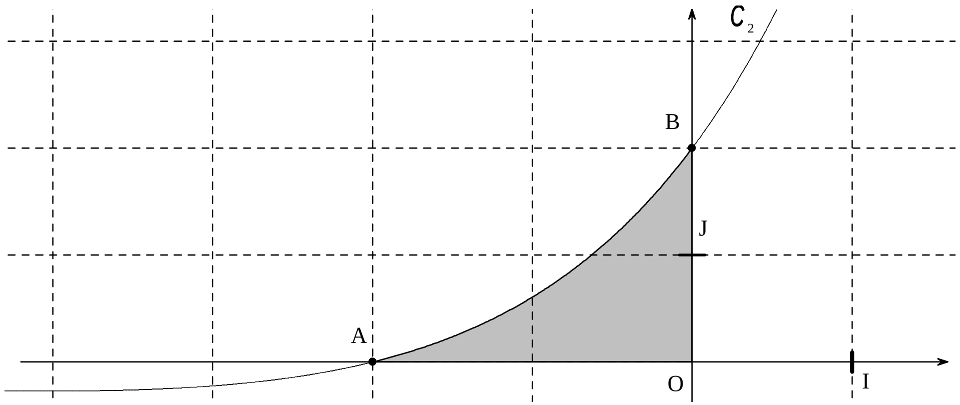
On note $\mathcal{D}$ le domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.
Déterminer la valeur exacte de *a* telle que la droite L_a partage le domaine $\mathcal{D}$ en deux domaines de même aire.

…………………………………. (une seule égalité)

IV. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

À tout réel $a > 0$ on fait correspondre la fonction $f_a : x \mapsto (x+a)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}_a$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$ du plan.
Soit A le point d'intersection de $\mathcal{C}_a$ avec l'axe des abscisses et B le point d'intersection de $\mathcal{C}_a$ avec l'axe des ordonnées.

On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_2$.



(ne rien écrire sur ce graphique)

1°) Vérifier que la fonction $\mathrm{F}_a : x \mapsto 2(x+a-2)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ est une primitive de f_a sur $\mathbb{R}$.

……..

……..

……..

2°) Exprimer en fonction de *a* l'aire du triangle mixtiligne $\overset{\frown}{\mathrm{OAB}}$ (en unité d'aire).

……………………………………………………………………… (une seule égalité)

3°) Dans cette question, on prend $a = 2$. On suppose également que $\mathrm{OI} = 3$ cm et que $\mathrm{OJ} = 2$ cm.
Déterminer l'aire du triangle mixtiligne $\overset{\frown}{\mathrm{OAB}}$ en cm^2 (on donnera la valeur exacte).

……………………………………..…………………………………..

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x \ln\left(1+\mathrm{e}^{-t}\right)\,\mathrm{d}t$ (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).

1°) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième de $\mathrm{F}(1)$.

……………………………… (un seul résultat sans égalité)

2°) Calculer $\mathrm{F}'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ ……………………………………………….…… (une seule égalité)

3°) Déterminer la valeur exacte de $\mathrm{F}'(\ln 2)$.

…………………….…………………………….. (une seule égalité)

Corrigé du contrôle du 21-4-2017

I.

On pose $\mathrm{I}_1=\int_{-1}^{1}\left(2x^3-3x^2+5x+1\right)\,\mathrm{d}x$; $\mathrm{I}_2=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\left(1-2\cos x\right)^2}\,\mathrm{d}x$; $\mathrm{I}_3=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\mathrm{e}^{\sin x}}\,\mathrm{d}x$.

Pour le calcul de I_3, on observera que $\frac{\cos x}{1+\mathrm{e}^{\sin x}}=\frac{\cos x\times\mathrm{e}^{-\sin x}}{1+\mathrm{e}^{-\sin x}}$ pour tout réel x.

Compléter les égalités suivantes puis détailler succinctement le calcul de chacune des intégrales en trois ou quatre lignes.

$\mathrm{I}_1=0$; $\mathrm{I}_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\mathrm{I}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\mathrm{I}_3=\ln\frac{2\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}$

$$\mathrm{I}_1=\int_{-1}^{1}\left(2x^3-3x^2+5x+1\right)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{2}{4}x^4-x^3+\frac{5}{2}x^2+x\right]_{-1}^{1}$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4-x^3+\frac{5}{2}x^2+x\right]_{-1}^{1}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cancel{-1}+\frac{5}{2}\cancel{+1}\right)-\left(\frac{1}{2}\cancel{+1}+\frac{5}{2}\cancel{-1}\right)$$

$$=0$$

$$\mathrm{I}_2=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\left(1-2\cos x\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-2\cos x}\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2\cos\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{1-2\cos 0}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{1}{1-2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}}+1\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1\times\left(1+\sqrt{2}\right)}{\left(1-\sqrt{2}\right)\times\left(1+\sqrt{2}\right)}+1\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{-1}+1\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{2}+1\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathrm{I}_3=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\mathrm{e}^{\sin x}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\times\mathrm{e}^{-\sin x}}{1+\mathrm{e}^{-\sin x}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[-\ln\left|1+\mathrm{e}^{-\sin x}\right|\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left[-\ln\left(1+\mathrm{e}^{-\sin x}\right)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\ln\left(1+\mathrm{e}^{-1}\right)+\ln 2$$

$$=\ln\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-1}}$$

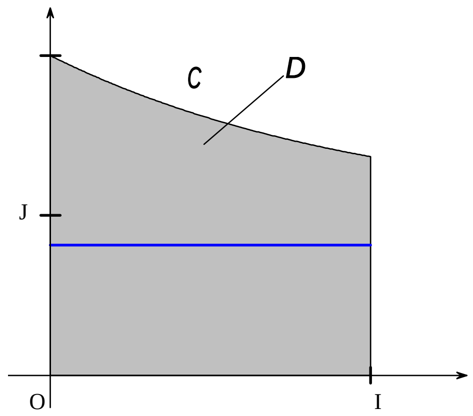
$$=\ln\frac{2}{1+\frac{1}{\mathrm{e}}}$$

$$=\ln\frac{2\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}$$

On vérifie les résultats grâce à commande de calculs d'intégrales sur la calculatrice.

II.

On considère la fonction $f:x\mapsto 1+\mathrm{e}^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\mathrm{I},\mathrm{J}\right)$ du plan. On considère le domaine $\mathcal{D}$ du plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$, d'autre part entre les droites d'équations $x=0$ et $x=1$. La courbe $\mathcal{C}$ et le domaine $\mathcal{D}$ sont représentés ci-dessous.



(ne rien écrire sur ce graphique)

On se propose de partager le domaine $\mathcal{D}$ en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y = a$ où a est un réel compris entre 0 et 1.
Déterminer la valeur exacte du réel a.

$a = 1 - \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ (une seule égalité)

Comme la fonction f est positive sur l'intervalle $[0\,;1]$, l'aire de $\mathcal{D}$ (domaine sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[0\,;1]$) est donnée en unité d'aire par $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = 2 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Comme $0 \leqslant a \leqslant 1$, le domaine $\mathcal{D}$ est partagé en deux domaines : un rectangle et un autre domaine.

L'un des côtés du rectangle est le segment $[\mathrm{OI}]$. Le côté parallèle à ce côté est le segment tracé en bleu sur le graphique.

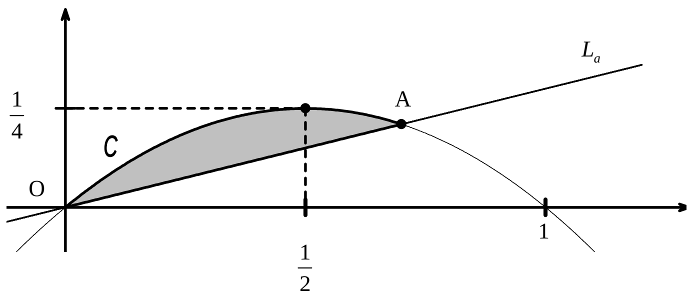
L'aire du rectangle est $\mathcal{A} = 1 \times a = a$ (en unité d'aire). On applique la formule aire d'un rectangle $=$ longueur $\times$ largeur.

On cherche a pour que le domaine $\mathcal{D}$ soit partagé en deux domaines de même aire.
Pour cela, l'aire du rectangle doit être égale à la moitié de l'aire de $\mathcal{D}$.

On doit donc avoir $a = \dfrac{2 - \frac{1}{\mathrm{e}}}{2} = \dfrac{2}{2} - \dfrac{\frac{1}{\mathrm{e}}}{2} = 1 - \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

III.

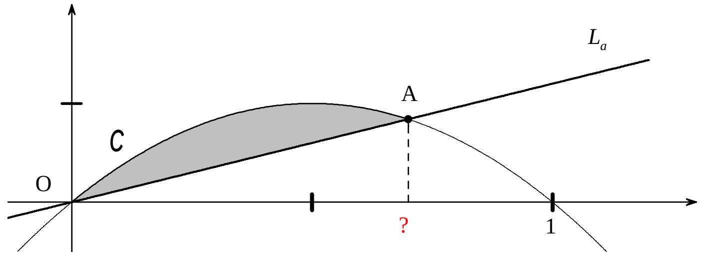
On considère la fonction $f : x \mapsto x - x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan d'origine O.
À tout réel a, on fait correspondre la droite L_a d'équation $y = ax$.



(ne rien écrire sur ce graphique)

1°) On note A le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de L_a autre que O lorsque $a \neq 1$.
Exprimer l'abscisse de A en fonction de a.

$x_{\mathrm{A}} = 1 - a$ (une seule égalité)



Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de L_a sont les solutions de l'équation $f(x) = ax$ (1).

$(1) \Leftrightarrow x - x^2 = ax$

$\Leftrightarrow (1-a)x - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x\left[(1-a) - x\right] = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $(1-a) - x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1 - a$

2°) Dans cette question, on suppose que $0 \leqslant a < 1$.
Exprimer en fonction de a l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$ et la droite L_a (en unité d'aire).

$\mathcal{A} = \dfrac{(1-a)^3}{6}$ (une seule égalité)

L'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$ et la droite L_a est donnée (en unité d'aire) par l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^{1-a} \left[f(x) - ax \right] \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{1-a} \left(x - x^2 - ax \right) \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{1-a} \left((1-a)x - x^2 \right) \, \mathrm{d}x$$

$$= \left[(1-a)\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{1-a}$$

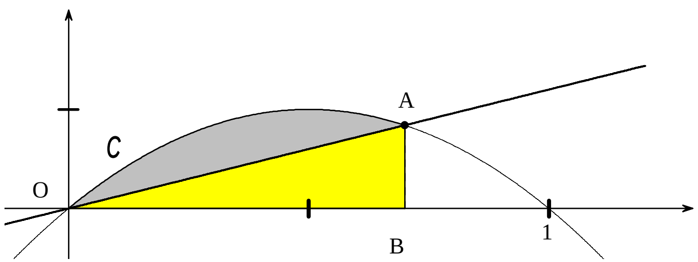
$$= \left[(1-a) \times \frac{(1-a)^2}{2} - \frac{(1-a)^3}{3} \right] - 0$$

$$= \frac{(1-a)^3}{2} - \frac{(1-a)^3}{3}$$

$$= \frac{(1-a)^3}{6}$$

Autre méthode :

$\mathcal{A}$ = aire sous la courbe sur l'intervalle $[0\,;1-a]$ – aire du triangle OAB avec $\mathrm{B}(1-a\,;0)$



3°) **Question bonus**

On note $\mathcal{D}$ le domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.
Déterminer la valeur exacte de a telle que la droite L_a partage le domaine $\mathcal{D}$ en deux domaines de même aire.

$$a = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \qquad \text{(une seule égalité)}$$

L'aire du domaine $\mathcal{D}$ (en unité d'aire) est donnée par $\displaystyle\int_0^1 \left(x - x^2 \right) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{6}$.

On cherche a tel que $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(1-a)^3}{\cancel{6}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cancel{6}}$$

$$\Leftrightarrow (1-a)^3 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1-a = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 1-a = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{2}}$$

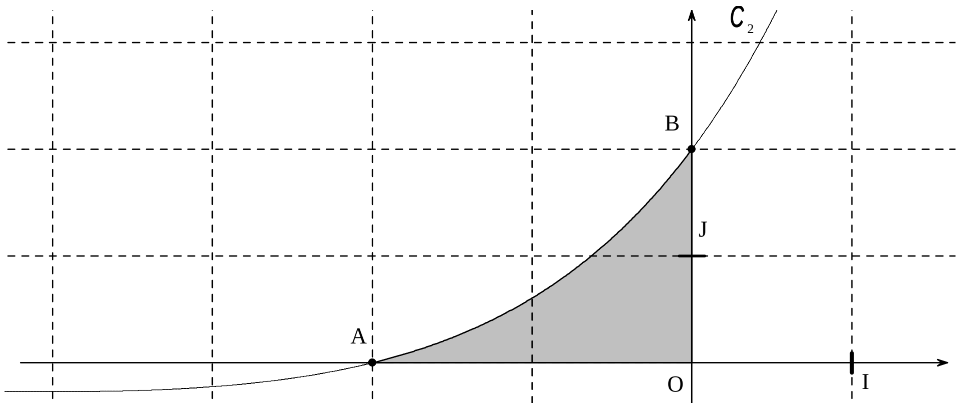
$$\Leftrightarrow 1-a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\Leftrightarrow a = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

IV.

À tout réel $a > 0$ on fait correspondre la fonction $f_a : x \mapsto (x+a)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}_a$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(\mathrm{O, I, J})$ du plan.
Soit A le point d'intersection de $\mathcal{C}_a$ avec l'axe des abscisses et B le point d'intersection de $\mathcal{C}_a$ avec l'axe des ordonnées.

On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_2$.



(ne rien écrire sur ce graphique)

1°) Vérifier que la fonction $\mathrm{F}_a : x \mapsto 2(x+a-2)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ est une primitive de f_a sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}'_a(x) = 2\left[1\times \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + (x+a-2)\times\frac{1}{2}\times \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right]$$

$$= 2\left[\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}(x+a-2)\times \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right]$$

$$= 2\left(1+\frac{x+a-2}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$$

$$= 2\times\frac{2+x+a-2}{2}\times \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$$

$$= \cancel{2}\times\frac{x+a}{\cancel{2}}\times \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$$

$$= (x+a)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$$

$$= f_a(x)$$

On en déduit que F_a est une primitive de f_a sur $\mathbb{R}$.

2°) Exprimer en fonction de a l'aire du triangle mixtiligne $\widehat{\mathrm{OAB}}$ (en unité d'aire).

$$\mathcal{A}_{\widehat{\mathrm{OAB}}} = 2(a-2)+4\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}} \text{ (une seule égalité)}$$

On commence par déterminer l'abscisse de A. On résout donc l'équation $f_a(x)=0 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow (x+a)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = 0$

$\Leftrightarrow x+a=0$ ou $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}=0$ (impossible)

$\Leftrightarrow x=-a$

Le point A a donc pour abscisse – a.

Par ailleurs, B a pour abscisse 0.

$$\mathcal{A}_{\widehat{\mathrm{OAB}}} = \int_{-a}^{0} f_a(x)\ \mathrm{d}x$$

$$= \left[\mathrm{F}_a(x)\right]_{-a}^{0}$$

$$= \mathrm{F}_a(0) - \mathrm{F}_a(-a)$$

On reprend l'expression de F_a.

$\mathrm{F}_a(0) = 2(0+a-2)\mathrm{e}^{\frac{0}{2}} = 2(a-2)$

$\mathrm{F}_a(-a) = 2(\cancel{-a}\cancel{+a}-2)\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}} = -4\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}$

On en déduit que $\mathcal{A}_{\widehat{\mathrm{OAB}}} = 2(a-2)+4\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}$.

3°) Dans cette question, on prend $a=2$. On suppose également que $\mathrm{OI}=3$ cm et que $\mathrm{OJ}=2$ cm.
Déterminer l'aire du triangle mixtiligne $\widehat{\mathrm{OAB}}$ en cm^2 (on donnera la valeur exacte).

$$\mathcal{A}_{\widehat{\mathrm{OAB}}} = \frac{24}{\mathrm{e}}\ \text{cm}^2$$

On applique le résultat de la question précédente pour $a=2$.

$\mathcal{A}_{\widehat{\mathrm{OAB}}} = 2\times(2-2)+4\mathrm{e}^{-\frac{2}{2}}$ u. a. donc $\mathcal{A}_{\widehat{\mathrm{OAB}}} = 4\mathrm{e}^{-1}$ u. a. soit $\mathcal{A}_{\widehat{\mathrm{OAB}}} = \frac{4}{\mathrm{e}}$ u.a.

Or 1 u. a. = aire du rectangle OIJK = OI × OJ = (2 cm) × (3 cm) = 6 cm^2.

On multiplie donc le résultat précédent par 6.

Donc $\mathcal{A}_{\widehat{\mathrm{OAB}}} = \frac{24}{\mathrm{e}}$ cm^2.

V.

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = \int_0^x \ln\left(1+\mathrm{e}^{-t}\right)\ \mathrm{d}t$ (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).

1°) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième de $\mathrm{F}(1)$.

0,484 (un seul résultat sans égalité)

$$\mathrm{F}(1) = \int_0^1 \ln\left(1+\mathrm{e}^{-t}\right)\ \mathrm{d}t$$

2°) Calculer $\mathrm{F}'(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}'(x) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) \text{ (une seule égalité)}$$

Il s'agit d'une propriété du cours.

3°) Déterminer la valeur exacte de $\mathrm{F}'(\ln 2)$.

$$\mathrm{F}'(\ln 2) = \ln\frac{3}{2} \text{ (une seule égalité)}$$

$$F'(\ln 2) = \ln\left(1 + e^{-\ln 2}\right)$$

$$= \ln\left(1 + e^{\ln\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \ln\frac{3}{2}$$