1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du vendredi 21 avril 2017 (50 minutes)

Prénom : ………………………………..…… **Nom :** ……………………………...…… **Note : …. / 20**

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5 - \dfrac{2}{3^n}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{4}{3^{n+1}}$.

On effectuera le calcul littéral en 5 étapes selon le modèle ci-dessous (à compléter).

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - u_n = \left(5 - \dfrac{2}{3^{n+1}}\right) - \left(5 - \dfrac{2}{3^n}\right)$

$=$ …………………………………………………

$=$ …………………………………………………

$=$ …………………………………………………

$=$ …………………………………………………

2°) Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ où *n* est un entier naturel quelconque. Après une courte étude, on conclura par une inégalité quantifiée du type : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n > 0$ ou $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n < 0$.

………

………

………

………

3°) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

On rédigera une phrase du type « D'après le résultat de la question 2°), la suite (u_n) est strictement …. ».

………

II. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point ; 5°) 1 point)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1 = -1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{3-u_n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Calculer u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 au brouillon.

1°) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = u_n + \dfrac{2}{n}$.

Calculer v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 au brouillon.

Conjecturer alors une propriété de la suite (v_n). Répondre par une phrase rédigée selon le modèle suivant :

« On peut conjecturer que la suite (v_n) est …………….. ».

………

2°) On admet que la conjecture formulée à la question 1°) est vraie.

En déduire une expression de u_n en fonction de *n* (*n* étant un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1) sous la forme $a + \dfrac{b}{n}$ où *a* et *b* sont deux entiers relatifs.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ……………………………………………….. (une seule égalité)

3°) Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de *n* (*n* étant un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1).

On donnera le résultat sous la forme d'un seul quotient avec dénominateur factorisé.

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - u_n =$ …………………………………………………

$=$ …………………………………………………

$=$ …………………………………………………

4°) Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ où *n* est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

Après une courte étude (deux lignes suffisent), conclure par une inégalité quantifiée du type : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ …. .

………

………

5°) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

On rédigera une phrase du type « D'après le résultat de la question 4°), la suite (u_n) est strictement …. ».

………

III. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 1}$ pour tout entier naturel n. On considère les suites (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

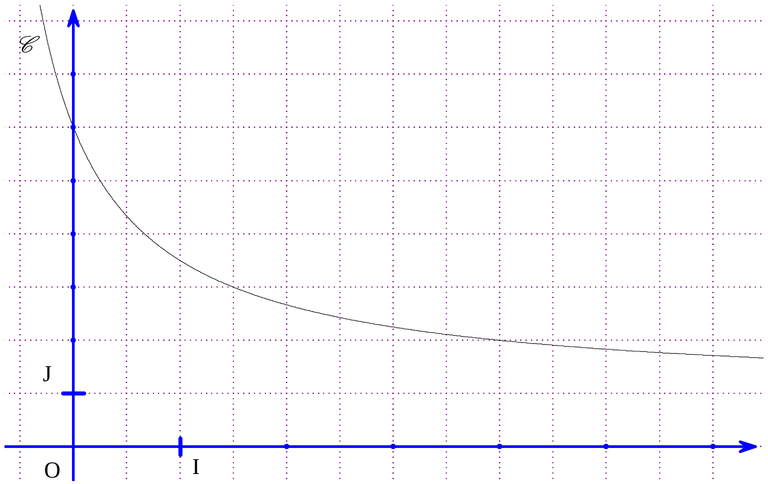
Conjecturer le sens de variation des suites (v_n) et (w_n). Répondre par une phrase rédigée sur le modèle suivant :

« On peut conjecturer que (v_n) est … et que (w_n) est … ».

………..

Indications :

- Les premiers termes de la suite (v_n) sont $v_0 = u_0$, $v_1 = u_2$, $v_2 = u_4$, $v_3 = u_6$ …
- Les premiers termes de la suite (w_n) sont $w_0 = u_1$, $w_1 = u_3$, $w_2 = u_5$, $w_3 = u_7$ …
- On pourra utiliser la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \frac{x+6}{x+1}$ tracée sur le graphique ci-dessous pour effectuer la construction des premiers termes de la suite (u_n).



IV. (1 point)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

La suite (u_n) est-elle monotone ? Répondre sans justifier par une phrase.

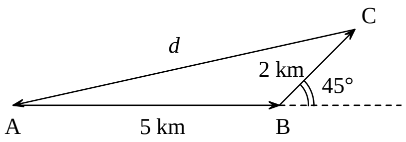
………..

V. (3 points : 2 points + 1 point)

Un promeneur marche 5 km en direction de l'est, puis 2 km en direction du nord-est. Surpris par le mauvais temps, il retourne directement à son point de départ en courant. On note d la distance en km qu'il a parcouru en courant. Déterminer la valeur exacte de d et la valeur arrondie de d au centième.

d = ………………………………. (valeur exacte)

La valeur arrondie au centième de d est égale à ……………. .



VI. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points)

Dans le plan P, on considère un triangle ABC isocèle en A tel que $\text{AI} = \text{BC} = 4$ où I désigne le milieu de $[\text{BC}]$.

On note J le milieu du segment $[\text{AI}]$.

1°) Recopier et compléter l'égalité : $\forall \text{M} \in P \quad \overrightarrow{\text{MA}} \cdot \left(\overrightarrow{\text{MB}} + \overrightarrow{\text{MC}}\right) = \ldots\ldots\ \text{MJ}^2 - \ldots\ldots$.

$\forall \text{M} \in P$ ……………………………………………. (une seule égalité)

2°) Déterminer l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait $\overrightarrow{\text{MA}} \cdot \left(\overrightarrow{\text{MB}} + \overrightarrow{\text{MC}}\right) = 10$.

- On commencera la recherche de l'ensemble par la phrase « Soit M un point quelconque de P. »
- On rédigera la recherche de la manière suivante sous la forme d'une « chaîne » d'équivalences :

« $\text{M} \in E \Leftrightarrow$ ………

$\Leftrightarrow$ ………

- On conclura ainsi : « L'ensemble E est ………………… » (aucune figure n'est demandée).

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé

I.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5 - \dfrac{2}{3^n}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{4}{3^{n+1}}$.

On effectuera le calcul littéral en 5 étapes selon le modèle ci-dessous (à compléter).

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - u_n = \left(5 - \frac{2}{3^{n+1}}\right) - \left(5 - \frac{2}{3^n}\right)$$

$$= \cancel{5} - \frac{2}{3^{n+1}} \cancel{-5} + \frac{2}{3^n}$$

$$= \frac{2}{3^n} - \frac{2}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{2 \times 3}{3^n \times 3} - \frac{2}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{6}{3^{n+1}} - \frac{2}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{4}{3^{n+1}}$$

2°) Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ où *n* est un entier naturel quelconque. Après une courte étude, on conclura par une inégalité quantifiée du type : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n > 0$ ou $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n < 0$.

$\forall n \in \mathbb{N} \ \dfrac{4}{3^{n+1}} > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} - u_n > 0$.

3°) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

On rédigera une phrase du type « D'après le résultat de la question 2°), la suite (u_n) est strictement …. ».

D'après le résultat de la question 2°), la suite (u_n) est strictement croissante.

II.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1 = -1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{3-u_n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Calculer u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 au brouillon.

$u_2 = 0$; $u_3 = \dfrac{1}{3}$; $u_4 = \dfrac{1}{2}$, $u_5 = \dfrac{3}{5}$, $u_6 = \dfrac{2}{3}$

1°) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = u_n + \dfrac{2}{n}$.

Calculer v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 au brouillon.

$v_1 = 1$; $v_2 = 1$; $v_3 = 1$; $v_4 = 1$, $v_5 = 1$, $v_6 = 1$

Conjecturer alors une propriété de la suite (v_n). Répondre par une phrase rédigée selon le modèle suivant :
« On peut conjecturer que la suite (v_n) est …………….. ».

On peut conjecturer que la suite (v_n) est constante (il semble que tous les termes soient égaux à 1).

2°) On admet que la conjecture formulée à la question 1°) est vraie.
En déduire une expression de u_n en fonction de *n* (*n* étant un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1) sous la forme $a + \dfrac{b}{n}$ où *a* et *b* sont deux entiers relatifs.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = 1 - \frac{2}{n} \text{ (une seule égalité)}$$

3°) Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de *n* (*n* étant un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1).
On donnera le résultat sous la forme d'un seul quotient avec dénominateur factorisé.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - u_n = \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$

$$= \frac{2}{n(n+1)}$$

4°) Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ où *n* est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.
Après une courte étude (deux lignes suffisent), conclure par une inégalité quantifiée du type : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ …. .

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n(n+1) > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} - u_n > 0$.

5°) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

On rédigera une phrase du type « D'après le résultat de la question 4°), la suite (u_n) est strictement …. ».

D'après le résultat de la question 4°), la suite (u_n) est strictement croissante.

III.

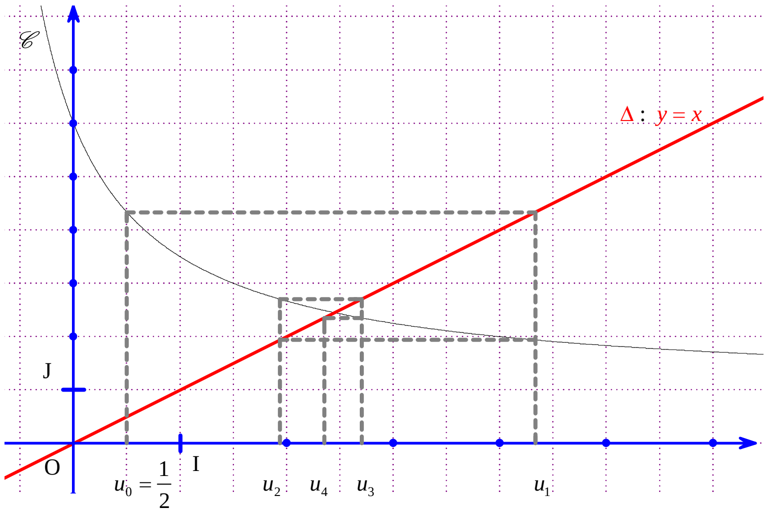
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{u_n + 1}$ pour tout entier naturel n. On considère les suites (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

Conjecturer le sens de variation des suites (v_n) et (w_n). Répondre par une phrase rédigée sur le modèle suivant :
« On peut conjecturer que (v_n) est … et que (w_n) est … ».

On peut conjecturer que (v_n) est croissante et que (w_n) est décroissante.

Indications :

- Les premiers termes de la suite (v_n) sont $v_0 = u_0$, $v_1 = u_2$, $v_2 = u_4$, $v_3 = u_6$ …
- Les premiers termes de la suite (w_n) sont $w_0 = u_1$, $w_1 = u_3$, $w_2 = u_5$, $w_3 = u_7$ …
- On pourra utiliser la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \dfrac{x+6}{x+1}$ tracée sur le graphique ci-dessous pour effectuer la construction des premiers termes de la suite (u_n).



IV.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

La suite (u_n) est-elle monotone ? Répondre sans justifier par une phrase.

La suite (u_n) n'est pas monotone : elle n'est ni croissante ni décroissante.

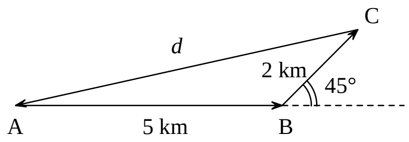
La suite des termes d'indices impairs est constante (tous les termes d'indices impaires sont égaux à 0).
La suite des termes d'indices pairs est décroissante.

V.

Un promeneur marche 5 km en direction de l'est, puis 2 km en direction du nord-est. Surpris par le mauvais temps, il retourne directement à son point de départ en courant. On note d la distance en km qu'il a parcouru en courant.
Déterminer la valeur exacte de d et la valeur arrondie de d au centième.

$d = 29 + 10\sqrt{2}$ (valeur exacte)

La valeur arrondie au centième de d est égale à 6,57.



D'après la formule du côté dans le triangle ABC, on a :

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{AB}\times\mathrm{BC}\times\cos\widehat{\mathrm{ABC}}$$

$$= 25 + 4 - 2\times5\times2\times\cos135° \quad (\text{car } \widehat{\mathrm{ABC}} = 180° - 45°)$$

$$= 29 - \cancel{2}\times5\times2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)$$

$$= 29 + 10\sqrt{2}$$

On en déduit que $\mathrm{AC} = \sqrt{29+10\sqrt{2}}$ km.

Donc $d = \sqrt{29+10\sqrt{2}}$.
Avec la calculatrice, on obtient : $d = 6{,}56826732...$ ce qui permet dire que la valeur arrondie de d au centième est égale à 6,57.

VI.

Dans le plan P, on considère un triangle ABC isocèle en A tel que $\mathrm{AI} = \mathrm{BC} = 4$ où I désigne le milieu de $[\mathrm{BC}]$.
On note J le milieu du segment $[\mathrm{AI}]$.

1°) Recopier et compléter l'égalité : $\forall \mathrm{M} \in P \quad \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\right) = ... \mathrm{MJ}^2 - ....$.

$\forall \mathrm{M} \in P \quad \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\right) = ... \mathrm{MJ}^2 - ....$ (une seule égalité)

$$\forall \mathrm{M} \in P \quad \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\right) = 2\mathrm{MJ}^2 - 8$$

Comme I est le milieu de $[\mathrm{BC}]$, $\forall \mathrm{M} \in P \quad \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}$.

$\forall \mathrm{M} \in P \quad \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \left(2\overrightarrow{\mathrm{MI}}\right)$

$= 2\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MI}}\right)$

$= 2\left(\mathrm{MJ}^2 - \dfrac{\mathrm{AI}^2}{4}\right)$ (on applique l'une des formules dite de la médiane)

$= 2\left(\mathrm{MJ}^2 - \dfrac{16}{4}\right)$

$= 2\left(\mathrm{MJ}^2 - 4\right)$

$= 2\mathrm{MJ}^2 - 8$

2°) Déterminer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que l'on ait $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\right) = 10$.

- On commencera la recherche de l'ensemble par la phrase « Soit M un point quelconque de *P*. »
- On rédigera la recherche de la manière suivante sous la forme d'une « chaîne » d'équivalences :

« $\mathrm{M} \in E \Leftrightarrow$ ……….

$\Leftrightarrow$ ………

- On conclura ainsi : « L'ensemble *E* est ………………… ».

Soit M un point quelconque de *P*.

$\mathrm{M} \in E \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\right) = 10$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{MJ}^2 - 8 = 10$ (d'après le résultat du 1°)

$\Leftrightarrow \mathrm{MJ}^2 = 9$

$\Leftrightarrow \mathrm{MJ} = 3$

$\Leftrightarrow \mathrm{JM} = 3$

L'ensemble *E* est le cercle de centre J et de rayon 3.

Fin du corrigé du contrôle