TS1 et TS3 spécialité

Contrôle du lundi 27 mars 2017 (50 minutes)

Prénom : …………………… **Nom : ………………………………**

Note : …. / 20

I. (7 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point ; 4°) 2 points)

On admet que $20! = 2^{18} \times 3^{8} \times 5^{4} \times 7^{2} \times 11 \times 13 \times 17 \times 19$.

1°) Déterminer le nombre de diviseurs positifs de $20!$.

……………………………………….. (un seul résultat sans égalité)

2°) Déterminer le nombre de diviseurs positifs impairs de $20!$.

……………………………………….. (un seul résultat sans égalité)

3°) Déterminer le plus petit entier naturel non nul qui multiplié par $20!$ donne un carré parfait.

……………………………………….. (un seul résultat sans égalité)

4°) En utilisant la décomposition en facteurs premiers, déterminer si $20!$ est divisible par 2016.

……

……

……

……

……

……

……

……

II. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points ; 3°) 2 points)

Soit a un entier naturel.

1°) Développer $\left(a^2 + a + 1\right)\left(a^2 - a + 1\right)$. On fera très attention à la présentation des calculs (à faire en colonnes).

……

……

……

……

2°) Le nombre $\mathrm{A} = a^4 + a^2 + 1$ peut-il être un nombre premier ? Répondre avec précision.

……

……

……

……

……

……

……

……

3°) Le nombre $3^{200} + 3^{100} + 1$ est-il premier ? Justifier convenablement.

……

……

……

……

III. (2 points)

On pose $a = 2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^{n}$ où n désigne un entier naturel.
Exprimer en fonction de n le nombre de diviseurs positifs de a. Justifier.

IV. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Soit a un entier relatif non nul. Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{A}_n = 2^n + a$.

1°) Soit n un entier naturel fixé. Vérifier que $\mathrm{A}_{n+1} = 2\mathrm{A}_n - a$ et que $\mathrm{A}_n = a \times 1 + 2^n$.
En déduire à l'aide du lemme d'Euclide que $\mathrm{PGCD}\left(\mathrm{A}_n\,;\,\mathrm{A}_{n+1}\right) = \mathrm{PGCD}\left(2^n\,;\,a\right)$.

2°) Soit n un entier naturel fixé. Quels sont les diviseurs positifs de 2^n ?
Répondre sans justifier en complétant directement la phrase ci-dessous.

Les diviseurs positifs de 2^n sont les entiers de la forme …………………………………………………………

3°) On suppose que a est impair. Déterminer $\mathrm{PGCD}\left(\mathrm{A}_n\,;\,\mathrm{A}_{n+1}\right)$.
On attend une rédaction soignée.

Corrigé du contrôle du 27-3-2017

I.

On admet que $20! = 2^{18} \times 3^8 \times 5^4 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19$.

1°) Déterminer le nombre de diviseurs positifs de $20!$.

41 040 (un seul résultat sans égalité)

On applique la propriété suivante :

> Si $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_r^{\alpha_r}$, les p_i étant des nombres premiers deux à deux distincts et les α_i étant des entiers naturels, le nombre de diviseurs entiers positifs de n est égal à $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times ... \times (\alpha_r + 1)$.

On calcule donc $(18+1)\times(8+1)\times(4+1)\times(2+1)\times(1+1)\times(1+1)\times(1+1)\times(1+1)$ soit $19 \times 9 \times 5 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.
On obtient 41 040.

2°) Déterminer le nombre de diviseurs positifs impairs de $20!$.

2 160 (un seul résultat sans égalité)

Les diviseurs positifs impairs de $20!$ sont les diviseurs positifs de $3^8 \times 5^4 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19$.
On applique la propriété appliquée à la question précédente.

3°) Déterminer le plus petit entier naturel non nul qui multiplié par $20!$ donne un carré parfait.

46 189 (un seul résultat sans égalité)

On applique la propriété du cours qui permet de dire si un nombre est un carré parfait à partir de sa décomposition en facteurs premiers.

$$20! = 2^{18} \times 3^8 \times 5^4 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19$$

Les exposants de 2, 3, 5, 7 sont tous pairs.
Les exposants de 11, 13, 17, 19 sont égaux à 1 donc impairs.

Le plus petit entier naturel non nul qui multiplié par $20!$ donne un carré parfait est $11 \times 13 \times 17 \times 19 = 46\,189$.

4°) En utilisant la décomposition en facteurs premiers, déterminer si $20!$ est divisible par 2016.

Le plus simple est d'utiliser la propriété suivante du cours :

> Soit a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
>
> $b \mid a$ si et seulement si tout facteur premier figurant dans la décomposition de b figure aussi dans celle de a avec un exposant supérieur ou égal à celui qu'il a dans la décomposition de b.

On décompose 2016 en facteurs premiers (méthode au choix) : $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$.

Cette décomposition ne fait intervenir que des nombres premiers présents dans la décomposition de $20!$
De plus, $5 < 8$, $2 < 8$ et $1 < 2$ donc $20!$ est divisible par 2016.

On notera que l'on utilise le sens réciproque de la propriété dont la démonstration est très facile.

Autre méthode :

La décomposition de $20! = 2^{18} \times 3^8 \times 5^4 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19$ permet d'écrire
$20! = 2016 \times \left(2^{13} \times 3^6 \times 5^4 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19\right)$.
Cette égalité permet d'affirmer que $20!$ est divisible par 2016.

Variante (un peu moins bien) :

$$\frac{20!}{2016} = 2^{13} \times 3^6 \times 5^4 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19$$

> Quelques élèves ont utilisé une méthode peu astucieuse consistant à calculer le PGCD de $20!$ et de 2016.

II.

Soit a un entier naturel.

1°) Développer $(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$. On fera très attention à la présentation des calculs (à faire en colonnes).

$$\begin{aligned}(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1) &= a^4 - a^3 + a^2 + a^3 - a^2 + a + a^2 - a + 1 \\ &= a^4 + a^2 + 1\end{aligned}$$

2°) Le nombre $\text{A} = a^4 + a^2 + 1$ peut-il être un nombre premier ? Répondre avec précision.

D'après la question précédente, on peut écrire : $\text{A} = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$.

Cette égalité fait apparaître A comme produit de deux entiers naturels (le facteur $a^2 + a + 1$ est positif de manière évidente et le facteur $a^2 - a + 1$ est également positif car pour tout entier naturel a, $a^2 \geqslant a$).

Nous allons regarder si l'un des deux facteurs peut être égal à 1.

On cherche les valeurs de a pour lesquelles $a^2 + a + 1 = 1$ (1) ou $a^2 - a + 1 = 1$ (2).

$(1) \Leftrightarrow a=0$ ou $a=-1$ (impossible car $a \in \mathbb{N}$)

Si $a=0$, $\mathrm{A}=1$ donc le nombre A n'est pas premier.

$(2) \Leftrightarrow a=0$ ou $a=1$

Si $a=1$, alors $\mathrm{A}=3$ donc A est premier.

Bilan de l'étude :

A est premier si et seulement si $a=1$.

3°) Le nombre $3^{200}+3^{100}+1$ est-il premier ? Justifier convenablement.

On observe que $3^{200}+3^{100}+1=\left(3^{50}\right)^{4}+\left(3^{50}\right)^{2}+1$.
On reconnaît ainsi la valeur de A pour $a=3^{50}$.

Comme $a \neq 1$, d'après l'étude de la question 2°), $3^{200}+3^{100}+1$ n'est pas premier.

Un certain nombre d'élèves ont repris l'égalité de la question 1°) pour écrire
$3^{200}+3^{100}+1=\left(30^{100}+3^{50}+1\right)\left(30^{100}-3^{50}+1\right)$.
Cette égalité fait apparaître de manière immédiate que le nombre $3^{200}+3^{100}+1$ n'est pas premier.
Il était cependant dommage de ne pas faire le lien direct avec A et le résultat de la question précédente.

III.

On pose $a=2^{n+2}+2^{n+1}+2^{n}$ où n désigne un entier naturel.
Exprimer en fonction de n le nombre de diviseurs positifs de a. Justifier.

On commence par établir la décomposition en facteurs premiers de a.

$a=2^{n}\times 2^{2}+2^{n}\times 2+2^{n}+1$
$a=2^{n}\times 7$

Soit d le nombre de diviseurs positifs de a.

$d=(n+1)(1+1)=2(n+1)$

IV.

Soit a un entier relatif non nul. Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{A}_{n}=2^{n}+a$

1°) Soit n un entier naturel fixé. Vérifier que $\mathrm{A}_{n+1}=2\mathrm{A}_{n}-a$ et que $\mathrm{A}_{n}=a\times 1+2^{n}$.
En déduire à l'aide du lemme d'Euclide que $\mathrm{PGCD}\left(\mathrm{A}_{n}\,;\,\mathrm{A}_{n+1}\right)=\mathrm{PGCD}\left(2^{n}\,;\,a\right)$.

$\mathrm{A}_{n+1}=2^{n+1}+a=2^{n}\times 2+2a-a=2\mathrm{A}_{n}-a \quad (1)$

$a\times 1+2^{n}=2^{n}+a=\mathrm{A}_{n} \quad (2)$

Les égalités (1) et (2) ne font intervenir que des entiers relatifs.

D'après (1) et le lemme d'Euclide, $\mathrm{PGCD}\left(\mathrm{A}_{n}\,;\,\mathrm{A}_{n+1}\right)=\mathrm{PGCD}\left(\mathrm{A}_{n}\,;\,-a\right)$.

De plus, on sait que $\mathrm{PGCD}\left(\mathrm{A}_{n}\,;\,-a\right)=\mathrm{PGCD}\left(\mathrm{A}_{n}\,;\,a\right)$ donc $\mathrm{PGCD}\left(\mathrm{A}_{n}\,;\,\mathrm{A}_{n+1}\right)=\mathrm{PGCD}\left(\mathrm{A}_{n}\,;\,a\right)$.

D'après (2) et le lemme d'Euclide, $\mathrm{PGCD}\left(\mathrm{A}_{n}\,;\,a\right)=\mathrm{PGCD}\left(a\,;\,2^{n}\right)$.

Donc $\mathrm{PGCD}\left(\mathrm{A}_{n}\,;\,\mathrm{A}_{n+1}\right)=\mathrm{PGCD}\left(2^{n}\,;\,a\right)$.

2°) Soit n un entier naturel fixé. Quels sont les diviseurs positifs de 2^{n} ?
Répondre sans justifier en complétant directement la phrase ci-dessous.

Les diviseurs positifs de 2^{n} sont les entiers naturels de la forme 2^{k} où k est un entier naturel tel que $0\leqslant k\leqslant n$.

Les diviseurs positifs de 2^{n} sont 1, 2, 2^{2}, 2^{3}, 2^{n-1}, 2^{n} c'est-à-dire les entiers de la forme 2^{k} avec $k\in\mathbb{N}$ et $0\leqslant k\leqslant n$.

3°) On suppose que a est impair. Déterminer $\mathrm{PGCD}\left(\mathrm{A}_{n}\,;\,\mathrm{A}_{n+1}\right)$.
On attend une rédaction soignée.

On sait que $\mathrm{PGCD}\left(\mathrm{A}_{n}\,;\,\mathrm{A}_{n+1}\right)=\mathrm{PGCD}\left(2^{n}\,;\,a\right)$.

Soit d un diviseur positif commun à 2^{n} et a.

$d \mid 2^{n}$ donc $d\in\left\{1\,;\,2\,;\,2^{2}\,;\,\dots\,;\,2^{n}\right\}$ d'après la question 1°).

$d \mid a$
Or a est impair donc d est impair.

D'où $d=1$ (car toutes les puissance de 2 d'exposant supérieur ou égal à 1 sont paires).

On a donc : $\mathrm{PGCD}\left(\mathrm{A}_{n}\,;\,\mathrm{A}_{n+1}\right)=\mathrm{PGCD}\left(2^{n}\,;\,a\right)=1$.
Pour a est impair, A_{n} et A_{n+1} sont donc premiers entre eux.

Autre méthode :

Les décompositions en facteurs premiers de 2^{n} et a font intervenir des facteurs premiers différents (uniquement 2 pour 2^{n} et des nombres premiers strictement à 2 pour a) donc 2^{n} et a sont premiers entre eux.