TS1

Contrôle du vendredi 31 mars 2017 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..……………

Note : …….. / 20

I. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Soit a un réel non nul. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-ax}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Vérifier que pour tout réel x, on a : $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^{ax}}$.

……..

……..

2°) En déduire l'expression d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

……………………………………………... (une seule égalité)

II. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Vérifier que pour tout réel x, on a : $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}-\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)^2}$.

……..

……..

……..

……..

2°) En déduire l'expression d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

……………………………………………... (une seule égalité)

III. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{2x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer l'expression d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

……………………………………………... (une seule égalité)

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2x^2+1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Déterminer l'expression d'une primitive G de g sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

……………………………………………... (une seule égalité)

IV. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

En observant que pour tout réel x, on a : $f(x)=\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$, déterminer l'expression d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

……………………………………………... (une seule égalité)

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{2x+\mathrm{e}^x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

En observant que pour tout réel x, on a : $g(x)=\left[\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}+\mathrm{e}^x\times\left(\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\right)\right]-f(x)$, déterminer l'expression d'une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

……………………………………………... (une seule égalité)

V. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \sin x\times(1-2\cos x)^3$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer l'expression de la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathrm{F}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=1$.

…………………..………………………………... (une seule égalité)

VI. (10 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point ; 5°) 2 points)

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les droites D et D' définies par les systèmes d'équations paramétriques suivants : $D \begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1+t \\ z = 1+t \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}\right)$; $D' \begin{cases} x = -1+3t' \\ y = -2+t' \\ z = t' \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}\right)$.

1°) On note A et B les points d'intersection respectifs de D et D' avec le plan $\left(x\mathrm{O}z\right)$.
Déterminer les coordonnées de A et de B. On donnera les résultats obtenus après recherche au brouillon.

$\mathrm{A}\left(\ldots\ldots ; \ldots\ldots ; \ldots\ldots\right)$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{B}\left(\ldots\ldots ; \ldots\ldots ; \ldots\ldots\right)$

2°) Démontrer que D et D' sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

3°) Déterminer un système d'équations paramétriques du plan P défini par les droites D et D'.

………

………

………

………

………

………

4°) Déterminer sans justifier un système d'équations paramétriques du plan P' passant par O et parallèle à P.

………

………

………

5°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection J du plan P et de l'axe $\left(\mathrm{O}z\right)$.

………

………

………

………

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 31-3-2017

I.

Soit a un réel non nul. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-ax}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Vérifier que pour tout réel x, on a : $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^{ax}}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)=\frac{1}{1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{ax}}}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{ax}+1}{\mathrm{e}^{ax}}}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^{ax}}$$

2°) En déduire l'expression d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

$$\mathrm{F}(x)=\frac{1}{a}\ln\left(1+\mathrm{e}^{ax}\right) \quad \text{(une seule égalité)}$$

Il s'agit de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec constante d'ajustement.

On peut remplacer les barres de valeur absolue par des parenthèses.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Vérifier que pour tout réel x, on a : $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}-\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)^2}$.

La meilleure méthode consiste à effectuer deux calculs séparément.

On pose $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}-\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)^2}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)-\mathrm{e}^{x}}{\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)^2}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\mathrm{e}^{x}\right)^2}{\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)^2}$$

$$=\left(\frac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}\right)^2$$

Par ailleurs,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)=\left(\frac{1}{1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}\right)^2$$

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x)=f(x)$.

On peut donc écrire $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}-\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)^2}$.

2°) En déduire l'expression d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

$$\mathrm{F}(x)=\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)+\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}} \quad \text{(une seule égalité)}$$

On utilise l'égalité obtenue à la question précédente. On reconnaît les formes $\dfrac{u'}{u}$ et $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u : x \mapsto 1+\mathrm{e}^{x}$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction $\mathrm{F}=\ln|\,u\,|+\dfrac{1}{u}$.

F a pour expression $\mathrm{F}(x)=\ln\left|1+\mathrm{e}^{x}\right|+\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}$.

On remplace les barres de valeur absolue par des parenthèses car $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1+\mathrm{e}^{x}>0$.

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}(x)=\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)+\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}$.

III.

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{2x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer l'expression d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

$$\mathrm{F}(x)=\frac{1}{4}\ln\left(2x^2+1\right) \text{ (une seule égalité)}$$

L'expression de f peut s'écrire $f(x)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{4x}{2x^2+1}$.

On a donc $f=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{u'}{u}$ où u est la fonction $x \mapsto 2x^2+1$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction $\mathrm{F}=\dfrac{1}{4}\ln|\,u\,|$.

L'expression de F s'écrit $\mathrm{F}(x)=\dfrac{1}{4}\ln|\,2x^2+1\,|$.

Comme l'expression $2x^2+1$ est toujours strictement positive, on peut remplacer les barres de valeur absolue par des parenthèses.

On en déduit que $\forall x\in\mathbb{R} \quad \mathrm{F}(x)=\dfrac{1}{4}\ln\left(2x^2+1\right)$.

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2x^2+1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Déterminer l'expression d'une primitive G de g sur $]0\,;+\infty[$.

$$\mathrm{G}(x)=x^2+\ln x \text{ (une seule égalité)}$$

Pour déterminer une primitive de g, on effectue une réécriture de son expression. On sépare en deux :
$\dfrac{2x^2+1}{x}=\dfrac{2x^2}{x}+\dfrac{1}{x}$.

$\forall x\in\mathbb{R}^* \quad g(x)=2x+\dfrac{1}{x}$

Une primitive G de g sur $]0\,;+\infty[$ est donc la fonction définie par $\mathrm{G}(x)=x^2+\ln|\,x\,|$ ou encore $\mathrm{G}(x)=x^2+\ln x$ (car $\forall x\in\,]0\,;+\infty[\quad x>0$ donc la présence de barres de valeur absolue est inutile).

IV.

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

En observant que pour tout réel x, on a : $f(x)=\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$, déterminer l'expression d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

$$\mathrm{F}(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} \text{ (une seule égalité)}$$

La réécriture $f(x)=\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ fait apparaître la forme $u'\times\mathrm{e}^u$ où u est la fonction définie par $u(x)=\mathrm{e}^x$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction e^u.

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{2x+\mathrm{e}^x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

En observant que pour tout réel x, on a : $g(x)=\left[\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}+\mathrm{e}^x\times\left(\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\right)\right]-f(x)$, déterminer l'expression d'une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

$$\mathrm{G}(x)=\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}-\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} \text{ ou } \mathrm{G}(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\left(\mathrm{e}^x-1\right) \text{ (une seule égalité)}$$

On considère d'abord l'expression $\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}+\mathrm{e}^x\times\left(\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\right)$.

Celle-ci est de la forme $u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$ où u et v sont les fonctions définies par $u(x)=\mathrm{e}^x$ (comme au 1°)) et $v(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ (par la dérivée d'une composée, on a bien $v'(x)=\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$).

Une primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}+\mathrm{e}^x\times\left(\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\right)$ est donc la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$.

On a par ailleurs déterminé l'expression d'une primitive F de la fonction f à la question 1°).

Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction G définie par $\mathrm{G}(x)=\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}-\mathrm{F}(x)=\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}-\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\left(\mathrm{e}^x-1\right)$.

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto \sin x\times(1-2\cos x)^3$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer l'expression de la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathrm{F}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=1$.

$$\mathrm{F}(x)=\frac{(1-2\cos x)^4}{8}-1 \text{ (une seule égalité)}$$

On pense à la forme $u'u^n$.
On pose $u(x)=1-2\cos x$. On a alors $u'(x)=2\sin x$.

On peut écrire $f=\dfrac{1}{2}\times u'\times u^3$ (on a une constante d'ajustement).

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $\mathrm{F}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u^4}{4}+k \ (k\in\mathbb{R})$ soit $\mathrm{F}=\dfrac{u^4}{8}+k \ (k\in\mathbb{R})$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $\mathrm{F} : x \mapsto \dfrac{(1-2\cos x)^4}{8}+k \ (k\in\mathbb{R})$.

On cherche k tel que $\mathrm{F}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=1 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\left(1-2\cos\frac{2\pi}{3}\right)^4}{8}+k=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+1)^4}{8}+k=1 \quad \left(\text{car } \cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^4}{8}+k=1$$

$$\Leftrightarrow 2+k=1$$

$$\Leftrightarrow k=-1$$

La primitive cherchée est la fonction F : $x \mapsto \dfrac{(1-2\cos x)^4}{8}-1$.

VI.

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les droites D et D' définies par les systèmes d'équations paramétriques suivants : $D \begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+t \\ z=1+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$; $D' \begin{cases} x=-1+3t' \\ y=-2+t' \\ z=t' \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

1°) On note A et B les points d'intersection respectifs de D et D' avec le plan $(x\text{O}z)$.
Déterminer les coordonnées de A et de B. On donnera les résultats obtenus après recherche au brouillon.

$$\text{A}(4\,;0\,;2) \qquad \text{B}(5\,;0\,;2)$$

Le plan $(x\text{O}z)$ a pour équation $y=0$.

$y_{\text{A}}=0$ donc le paramètre t du point A sur D vérifie $-1+t=0$ ce qui donne immédiatement $t=1$.

On reporte cette valeur dans les équations paramétriques afin de déterminer les autres coordonnées de A.

On obtient $x_{\text{A}}=2+2\times1=4$ et $z_{\text{A}}=1+1=2$.

On procède de la même manière pour les coordonnées de B.

2°) Démontrer que D et D' sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I.

On résout le système $\begin{cases} 2+2t=-1+3t' & (1) \\ -1+t=-2+t' & (2) \\ 1+t=t' & (3) \end{cases}$.

Il s'agit d'un système de trois équations à deux inconnues.

On va d'abord le système formé par les équations (1) et (3).

On remplace l'expression de t' en fonction de t donnée par l'équation (3) dans l'équation (1).

(1) donne alors $2+2t=-1+3(1+t)$ $(1')$.

$$(1') \Leftrightarrow 2+2t=-1+3+3t$$
$$\Leftrightarrow 2=2+2t$$
$$\Leftrightarrow t=0$$

(3) donne alors $t'=1$.

On reprend l'équation (2) en remplaçant t par 0 et t' par 1.

D'une part, $-1+t=-1+0=-1$. D'autre part, $-2+t'=-2+1=-1$.
Ainsi, l'équation (2) est vérifiée pour $t=0$ et $t'=1$.

Le système formé par les équations (1), (2), (3) admet donc le couple $(0\,;1)$ pour solution.

On remplace t par 0 dans le système d'équations paramétriques de D.

On obtient $\begin{cases} x_{\text{I}}=2 \\ y_{\text{I}}=-1 \\ z_{\text{I}}=1 \end{cases}$ d'où $\text{I}(2\,;-1\,;1)$.

3°) Déterminer un système d'équations paramétriques du plan P défini par les droites D et D'.

$\vec{u}(2\,;1\,;1)$ est un vecteur directeur de D.

$\vec{v}(3\,;1\,;1)$ est un vecteur directeur de D'.

Un repère de P est donc $\left(\text{I}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Un système d'équations paramétriques de P s'écrit donc $\begin{cases} x=2+2\alpha+3\beta \\ y=-1+\alpha+\beta \\ z=1+\alpha+\beta \end{cases} \left((\alpha\,;\beta)\in\mathbb{R}^2\right)$.

4°) Déterminer sans justifier un système d'équations paramétriques du plan P' passant par O et parallèle à P.

$$P' \begin{cases} x=2\alpha+3\beta \\ y=\alpha+\beta \\ z=\alpha+\beta \end{cases} \left((\alpha\,;\beta)\in\mathbb{R}^2\right).$$

5°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection J du plan *P* et de l'axe $(\mathrm{O}z)$.

L'axe $(\mathrm{O}z)$ est caractérisé par le système d'équations $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ donc pour déterminer les coordonnées de J, on résout le système $\begin{cases} 2+2\alpha+3\beta=0 & (1) \\ -1+\alpha+\beta=0 & (2) \end{cases}$.

Il s'agit d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

Son déterminant est non nul. Il admet donc un unique couple solution.

(2) donne $\alpha=1-\beta \quad (2')$.

En remplaçant dans (1), on obtient $2+2(1-\beta)+3\beta=0 \quad (1')$.

$$\begin{aligned} (1') &\Leftrightarrow 4+\beta=0 \\ &\Leftrightarrow \beta=-4 \end{aligned}$$

$(2')$ donne alors $\alpha=5$.

On remplace alors α et β par les valeurs trouvées dans les équations paramétriques qui définissent *P*.

On obtient $\begin{cases} x_{\mathrm{J}}=0 \\ y_{\mathrm{J}}=0 \\ z_{\mathrm{J}}=2 \end{cases}$ d'où $\mathrm{J}(0\,;0\,;2)$.