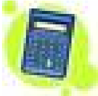
$1^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 28 mars 2017 (50 minutes)



Prénom et nom : ……………………….…………

Note : ….. / 20

I. (5 points : 1°) 2 points : 0,5 point par calcul ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point + 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = a$ où a est un réel et la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 + (-1)^n u_n$ pour tout entier naturel n.

1°) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 en fonction de a.

…………………………..	…………………………..	…………………………..	…………………………..
…………………………..	…………………………..	…………………………..	…………………………..
…………………………..	…………………………..	…………………………..	…………………………..
…………………………..	…………………………..	…………………………..	…………………………..

2°) Que peut-on conjecturer pour la suite (u_n) ? On attend une réponse précise.
On rédigera sur le modèle suivant à recopier et compléter : « D'après le calcul des premiers termes, on peut conjecturer que la suite (u_n) est … ».

………

………

3°) On admet que la conjecture précédente est vraie.

• Exprimer u_{2017} en fonction de a. ………………………….. (une seule égalité)	• Exprimer $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{2017}$ en fonction de a. ………………………….. (une seule égalité)

II. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que chaque terme, sauf le premier, est égal à l'inverse de la somme du terme précédent et de 2.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n.

$\forall n \in \mathbb{N}$ ………………………………… (une seule égalité)

2°) Calculer u_0 sachant que $u_1 = \dfrac{3}{5}$.

………………………………… (une seule égalité)

III. (2,5 points : 1°) 0,5 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par ses deux premiers termes $u_0 = -8$ et $u_1 = 4$ ainsi que par la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_{n+2} - u_n}{2}$ pour tout entier naturel n.

1°) Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n et de u_{n+1}.

……………………………………….. (une seule égalité)

2°) Calculer u_2 et u_3.

…………………………..	…………………………..
…………………………..	…………………………..
…………………………..	…………………………..
…………………………..	…………………………..

3°) « Rentrer » la suite (u_n) dans la calculatrice en utilisant la relation de récurrence du 1°).
En déduire la valeur de u_{20}.

…………………….……… (une seule égalité)

IV. (2 points)

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k$.

Exprimer u_n suivant les valeurs de n. On distinguera deux cas.
Aucune justification n'est demandée.

………………………………………………………..	………………………………………………………..
………………………………………………………..	………………………………………………………..

V. (2,5 points : 1°) 1,5 points ; 2°) 1 point)

On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $n \times u_n = (n+1) \times u_{n-1} + 1$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1°) Calculer u_1, u_2 et u_3.

…………………………………………………………………..…………………………………………………

…………………………………………………………………..…………………………………………………

…………………………………………………………………..…………………………………………………

…………………………………………………………………..…………………………………………………

…………………………………………………………………..…………………………………………………

…………………………………………………………………..…………………………………………………

2°) Quelle conjecture peut-on émettre sur la formule explicite de cette suite ?

On peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N}$ ……………………….………… (une seule égalité).

VI. (3 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 1}$ pour tout entier naturel n.

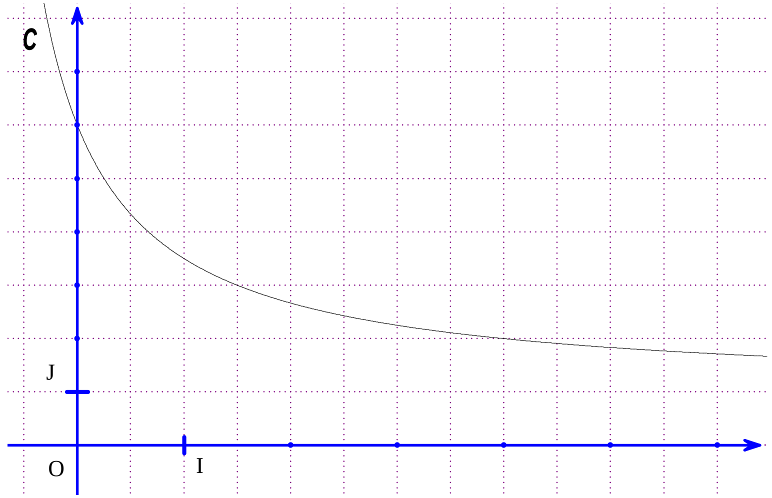
Sur le graphique ci-contre, la courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $y = \frac{x+6}{x+1}$ dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

Effectuer avec soin et précision la construction en « escargot » permettant de faire apparaître les termes de la suite (u_n) de u_0 à u_4 sur l'axe des abscisses (sans effectuer de calculs).

Laisser les traits et éléments de construction apparents.

On n'écrira aucune valeur sur l'axe des abscisses sauf éventuellement celle de u_0. On écrira juste u_0, u_1, u_2 …

On n'écrira rien sur l'axe des ordonnées.



VII. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Une personne décide d'ouvrir un compte épargne le premier janvier 2017 et d'y placer 2 000 euros. Le placement à intérêts composés est au taux annuel de 3 %. Elle verse 150 euros sur ce compte tous les 1er janvier suivants.

Pour tout entier naturel *n*, on note u_n le montant présent sur ce compte au premier janvier de l'année $2017 + n$ après le versement de 150 euros. On a $u_0 = 2000$.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n (*n* étant un entier naturel). Répondre sans justifier.

$\forall n \in \mathbb{N}$ ………………………………………………………. (une seule égalité)

2°) À partir de quelle année, cette personne aura-t-elle au moins 4 000 euros sur son compte épargne ?
Indiquer par une phrase la façon dont la réponse a été trouvée.

………………….. (un seul résultat, sans égalité)

…………………………………………………………………..…………………………………………………

VIII. (1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ telle que $u_1 = 2{,}1$, $u_2 = 2{,}01$, $u_3 = 2{,}001$, … $u_n = 2{,}\underbrace{00...01}$ (*n* chiffres après la virgule).

Proposer une expression explicite de u_n en fonction de *n* (*n* étant un entier naturel supérieur ou égal à 1).

Répondre sans justifier.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ …………………………………… (une seule égalité)

Corrigé du contrôle du 28-3-2017

I.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = a$ où a est un réel et la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 + (-1)^n u_n$ pour tout entier naturel n.

1°) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 en fonction de a.

$u_1 = 1 + (-1)^0 \times u_0$	$u_2 = 1 + (-1)^1 \times u_1$	$u_3 = 1 + (-1)^2 \times u_2$	$u_4 = 1 + (-1)^3 \times u_3$
$= 1 + u_0$	$= 1 - u_1$	$= 1 + u_2$	$= 1 - u_3$
$= 1 + a$	$= 1 - (1 + a)$	$= 1 - a$	$= 1 - (1 - a)$
	$= -a$		$= a$

2°) Que peut-on conjecturer pour la suite (u_n) ? On attend une réponse précise.
On rédigera sur le modèle suivant à recopier et compléter : « D'après le calcul des premiers termes, on peut conjecturer que la suite (u_n) est … ».

D'après le calcul des premiers termes, on peut conjecturer que la suite (u_n) est périodique de période 4.

3°) On admet que la conjecture précédente est vraie.

• Exprimer u_{2017} en fonction de a.

$$u_{2017} = 1 + a \text{ (une seule égalité)}$$

• Exprimer $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{2017}$ en fonction de a.

$$S = 1009 + 2a \text{ (une seule égalité)}$$

On écrit : $2017 = 2016 + 1 = 4 \times 504 + 1$ donc $u_{2017} = u_1$.

Pour calculer S, on effectue des groupements de termes par 4 en observant que la somme de 4 termes consécutifs est égale à $a + (1 + a) - a + 1 - a = 2$.

$$S = (u_0 + u_1 + u_2 + u_3) + (u_4 + u_5 + u_6 + u_6) + ... + (u_{2012} + u_{2013} + u_{2014} + u_{2015}) + u_{2016} + u_{2017}$$

$2012 = 4 \times 503$ donc il y a 504 « paquets » de 4 termes consécutifs.

$S = 2 \times 504 + a + 1 + a$

$S = 1009 + 2a$

II.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et telle que, chaque terme sauf le premier, est égal à l'inverse de la somme du terme précédent et de 2.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 2} \text{ (une seule égalité)}$$

2°) Calculer u_0 sachant que $u_1 = \frac{3}{5}$.

$$u_0 = -\frac{1}{3} \text{ (une seule égalité)}$$

On cherche u_0 tel que $u_1 = \frac{3}{5}$ (1).

$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{u_0 + 2} = \frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow 5 = 3(u_0 + 2)$ (produits en croix)

$\Leftrightarrow 3u_0 = -1$

$\Leftrightarrow u_0 = -\frac{1}{3}$

III.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par ses deux premiers termes $u_0 = -8$ et $u_1 = 4$ ainsi que par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_{n+2} - u_n}{2}$ pour tout entier naturel n.

1°) Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n et de u_{n+1}.

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n \text{ (une seule égalité)}$$

On prend la relation $u_{n+1} = \frac{u_{n+2} - u_n}{2}$ et l'on effectue un produit en croix. On obtient $2u_{n+1} = u_{n+2} - u_n$ ce qui donne immédiatement $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$.

2°) Calculer u_2 et u_3.

$u_2 = 2u_1 + u_0$	$u_3 = 2u_2 + u_1$
$= 2 \times 4 - 8$	$= 2 \times 0 + 4$
$= 0$	$= 4$

3°) « Rentrer » la suite (u_n) dans la calculatrice en utilisant la relation de récurrence du 1°).
En déduire la valeur de u_{20}.

$u_{20} = 10\ 976\ 840$ (une seule égalité)

Sur la calculatrice, on « rentre » la suite de la manière suivante :

Modèles non mis à jour :

$n\text{Min} = 0$
$\text{u}(n) = 2\text{u}(n-1) + \text{u}(n-2)$
$\text{u}(n\text{Min}) = \{4, -8\}$

Pour $n-1$ et $n-2$, on utilise le « grand » – (et non le « petit » –).

Attention à l'ordre :

$\text{u}(n\text{Min}) = \{4, -8\}$
$u_1 \quad u_0$

Modèle mis à jour :

$n\text{Min} = 0$
$\text{u}(n) = 2\text{u}(n-1) + \text{u}(n-2)$
$\text{u}(0) = -8$
$\text{u}(1) = 4$

IV.

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k$.

Exprimer u_n suivant les valeurs de n. On distinguera deux cas.
Aucune justification n'est demandée.

Si n est pair, alors $u_n = 1$.	Si n est impair, alors $u_n = 0$.

Pour établir ce résultat, le mieux est de calculer u_0, u_1, u_2… pour comprendre ce qui se passe.

On peut écrire la somme sous forme développée : $u_n = 1 - 1 + 1 - 1 + ... + (-1)^n$.

V.

On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $n \times u_n = (n+1) \times u_{n-1} + 1$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1°) Calculer u_1, u_2 et u_3.

Les calculs suivants sont donnés sans aucune rédaction.

$1 \times u_1 = (1+1) \times u_0 + 1$	$2 \times u_2 = (2+1) \times u_1 + 1$	$3 \times u_3 = (3+1) \times u_2 + 1$
$u_1 = 2u_0 + 1$	$2u_2 = 3u_1 + 1$	$3u_3 = 4u_2 + 1$
$u_1 = 2 \times 1 + 1$	$2u_2 = 3 \times 3 + 1$	$3u_3 = 4 \times 5 + 1$
$u_1 = 3$	$2u_2 = 10$	$3u_3 = 21$
	$u_2 = 5$	$u_3 = 7$

On peut aussi dès le début transformer la relation de récurrence $n \times u_n = (n+1) \times u_{n-1} + 1$ en $u_n = \dfrac{(n+1) \times u_{n-1} + 1}{n}$ et utiliser cette égalité pour faire les calculs des premiers termes.

2°) Quelle conjecture peut-on émettre sur la formule explicite de cette suite ?

On attend une formule explicite de u_n en fonction de n uniquement.

On répond par rapport aux résultats obtenus dans la question 1°).

On peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n + 1$ (une seule égalité).

VI.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{u_n + 1}$ pour tout entier naturel n.

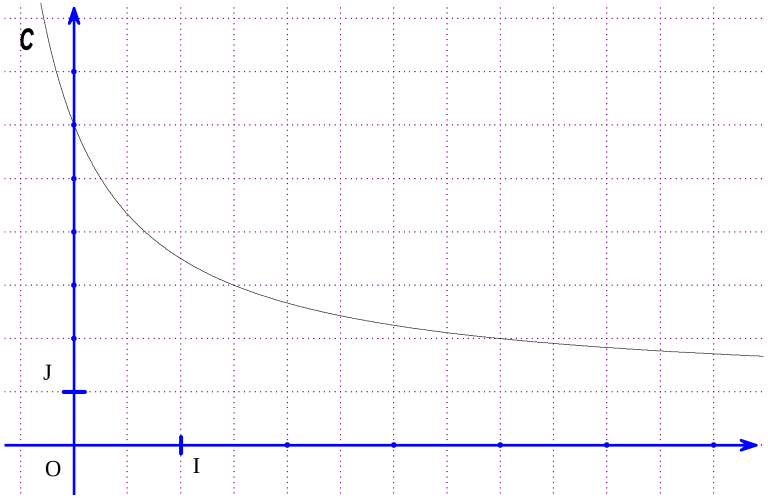
Sur le graphique ci-contre, la courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $y = \dfrac{x+6}{x+1}$ dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \text{I}, \text{J})$.

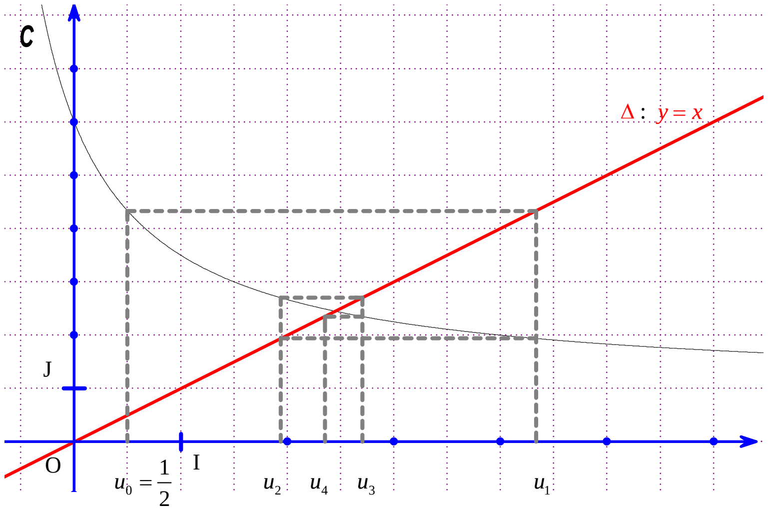
Effectuer avec soin et précision la construction en « escargot » permettant de faire apparaître les termes de la suite (u_n) de u_0 à u_4 sur l'axe des abscisses (sans effectuer de calculs).

Laisser les traits et éléments de construction apparents.

On n'écrira aucune valeur sur l'axe des abscisses sauf éventuellement celle de u_0. On écrira juste u_0, u_1, u_2…

On n'écrira rien sur l'axe des ordonnées.





Il fallait faire très attention à l'échelle (aux unités) sur les axes pour le tracé de la droite Δ.
Le repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$ n'est pas orthonormé donc Δ n'est pas la première bissectrice.

Un certain nombre d'élèves n'y a pas pris garde, obtenant des constructions fausses (j'accordai cependant la moitié des points si le principe de construction était correct).

VII.

Une personne décide d'ouvrir un compte épargne le premier janvier 2017 et d'y placer 2 000 euros. Le placement à intérêts composés est au taux annuel de 3 %. Elle verse 150 euros sur ce compte tous les 1^{er} janvier suivants.
Pour tout entier naturel *n*, on note u_n le montant présent sur ce compte au premier janvier de l'année $2017+n$ après le versement de 150 euros. On a $u_0 = 2000$.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n (*n* étant un entier naturel). Répondre sans justifier.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = 1{,}03u_n + 150 \quad \text{(une seule égalité)}$$

Ajouter 3 % à un nombre, c'est multiplier par $1+\frac{3}{100} = 1{,}03$.
Pour passer de l'année *n* à l'année $n+1$, on multiplie le capital par 1,03 puis on ajoute 150.

2°) À partir de quelle année, cette personne aura-t-elle au moins 4 000 euros sur son compte épargne ?
Indiquer par une phrase la façon dont la réponse a été trouvée.

2026 (un seul résultat, sans égalité)

On peut par exemple rentrer la suite dans la calculatrice.

C'est à partir de $n = 9$ que la personne aura au moins 4 000 euros sur son compte, c'est-à-dire à partir de l'année $2017+9 = 2026$.

VIII.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ telle que $u_1 = 2{,}1$; $u_2 = 2{,}01$; $u_3 = 2{,}001$, …, $u_n = 2{,}\underbrace{00...01}$ (*n* chiffres après la virgule).
Proposer une expression explicite de u_n en fonction de *n* (*n* étant un entier naturel supérieur ou égal à 1).
Répondre sans justifier.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = 2 + 10^{-n} \quad \text{(une seule égalité)}$$

On peut aussi écrire $u_n = 2 + 0{,}1^n$ ou $u_n = 2 + \frac{1}{10^n}$.