$1^{ère}$ S1

Contrôle du mardi 21 mars 2017
(50 minutes)

Prénom et nom : ……………………….………….

Note : ….. / 20

Dans les exercices **I** à **IV**, on se place dans le plan *P* dans lequel une unité de longueur a été fixée.

I. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Les deux questions sont indépendantes.

1°) Dans cette question, on suppose que $\left(2\vec{u}\right)\cdot\left(-3\vec{v}\right)=18$.

Compléter l'égalité : $\vec{u}\cdot\vec{v}=$ ....

2°) Développer et réduire le produit scalaire $\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)\cdot\left(2\vec{u}-\vec{v}\right)$.

$\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)\cdot\left(2\vec{u}-\vec{v}\right)=$ ....

II. (1 point : chaque réponse juste rapporte 0,5 point ; chaque réponse fausse enlève 0,5 point)

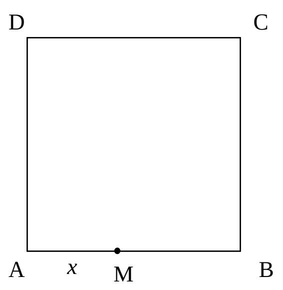
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\vec{u}^2=\vec{v}^2$.
Cocher la (les) proposition(s) exacte(s).

☐ $\left\|\vec{u}\right\|=\left\|\vec{v}\right\|$ ☐ $\vec{u}=\vec{v}$ ou $\vec{u}=-\vec{v}$ ☐ $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux. ☐ $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|$

III. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points ; 3°) 2 points)

Soit ABCD un carré de côté 2. Soit M un point quelconque du segment $[\text{AB}]$. On pose $\text{AM}=x$.

1°) Le but de cette question est d'exprimer le produit scalaire $p=\overrightarrow{\text{MC}}\cdot\overrightarrow{\text{MD}}$ en fonction de *x*.



Il est demandé de ne rien écrire sur la figure.

On présentera tous les calculs très proprement et sans ratures.

• En observant que l'on peut écrire $\overrightarrow{\text{MC}}=\overrightarrow{\text{MB}}+\overrightarrow{\text{BC}}$ et $\overrightarrow{\text{MD}}=\overrightarrow{\text{MA}}+\overrightarrow{\text{AD}}$ (relation de Chasles), écrire *p* comme somme de quatre produits scalaires.

$p=$ ....

(écrire très lisiblement et sans ratures)

• Achever le calcul de *p*. On rédigera les explications utiles.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

3°) On suppose dans cette question que M est le milieu de $[\text{AB}]$.

À l'aide de la valeur de *p* obtenue dans ce cas, déterminer la valeur de $\cos\widehat{\text{CMD}}$.

………

………

………

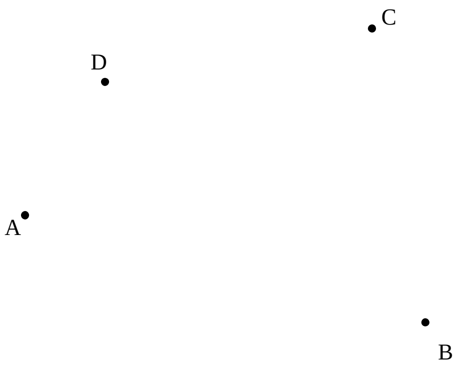
………

………

IV. (6 points)

Soit A, B, C, D quatre points quelconques du plan *P*.
Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1 (2 points)



Construire sur la figure en laissant les traits de construction apparents :

- le point F de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC}$ (1) ;
- le point G de la droite (CD) tel que $\overrightarrow{AG} \bullet \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GA} \bullet \overrightarrow{DB}$ (2).

Partie 2 (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

Dans cette partie, on suppose que le quadrilatère ACBD n'est pas un parallélogramme.
Le but de cette partie est de déterminer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right) \bullet \left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right) = 0$.

1°) On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et de $[CD]$.
Compléter les égalités suivantes en utilisant les points I et J.

$\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = ...$ $\qquad \forall M \in P \quad \overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} = ...$

2°) Compléter les lignes du cadre ci-dessous par des égalités de produits scalaires.

Soit M un point quelconque du plan *P*.

$M \in E \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right) \bullet \left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right) = 0$

$\Leftrightarrow$ ………………………..…………………..

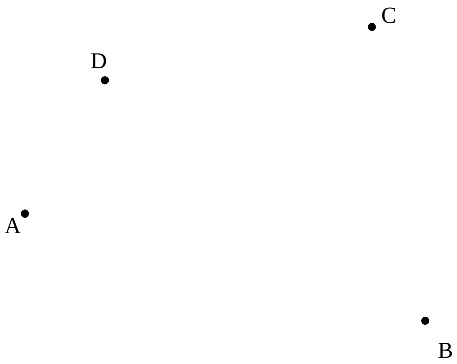
$\Leftrightarrow$ ………………………..…………………..

$\Leftrightarrow$ ………………………..…………………..

3°) À partir de la dernière égalité (et en l'interprétant convenablement), formuler une conclusion claire (sans employer le mot « ensemble » et sans parler du point M).

L'ensemble *E* est ………………………..……………………………………………………………………..……………

Tracer avec soin l'ensemble *E* sur la figure ci-dessous.



V. (4 points 1°) 0 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Un jeu consiste à lancer 100 fois une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir pile en un lancer soit égale à 0,4.
À chaque lancer, si la pièce tombe sur pile, on gagne 2 euros ; si la pièce tombe sur face, on perd 1 euro.
On note X le nombre de piles obtenus à l'issue des 100 lancers et G le gain algébrique en euros.

1°) Compléter la phrase suivante avec le maximum de précision.

X suit ……

2°) Exprimer G en fonction de X.

G = ... (un seul résultat sous forme réduite)

3°) Calculer la probabilité d'obtenir un gain supérieur ou égal à 40 euros. On donnera la valeur arrondie au millième.
Indication : Chercher les valeurs de X pour lesquelles le gain est supérieur ou égal à 40.

……………………….. (un seul résultat, sans égalité)

Corrigé du contrôle du 21-3-2017

I.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Les deux questions sont indépendantes.

1°) Dans cette question, on suppose que $\left(2\vec{u}\right)\cdot\left(-3\vec{v}\right)=18$.

Compléter l'égalité : $\vec{u}\cdot\vec{v}=-3$.

On part de l'égalité $\left(2\vec{u}\right)\cdot\left(-3\vec{v}\right)=18 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow -6\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)=18$ (propriété du cours : $\left(k\vec{u}\right)\cdot\left(k'\vec{v}\right)=kk'\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$)

$\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=-\dfrac{18}{6}$

$\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=-3$

2°) Développer et réduire le produit scalaire $\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)\cdot\left(2\vec{u}-\vec{v}\right)$.

$$\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)\cdot\left(2\vec{u}-\vec{v}\right)=2\vec{u}^2+3\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)-2\vec{v}^2$$

$$\begin{aligned}\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)\cdot\left(2\vec{u}-\vec{v}\right)&=\vec{u}\cdot\left(2\vec{u}\right)+\vec{u}\cdot\left(-\vec{v}\right)+\left(2\vec{v}\right)\cdot\left(2\vec{u}\right)+\left(2\vec{v}\right)\cdot\left(-\vec{v}\right)\\&=2\left(\vec{u}\cdot\vec{u}\right)-\vec{u}\cdot\vec{v}+4\left(\vec{v}\cdot\vec{u}\right)-2\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right)\\&=2\vec{u}^2-\vec{u}\cdot\vec{v}+4\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)-2\vec{v}^2\\&=2\vec{u}^2+3\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)-2\vec{v}^2\end{aligned}$$

II.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\vec{u}^2=\vec{v}^2$.
Cocher la (les) proposition(s) exacte(s).

☒ $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$ ☐ $\vec{u}=\vec{v}$ ou $\vec{u}=-\vec{v}$ ☒ $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux. ☐ $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\|\vec{u}-\vec{v}\|$

On part de l'égalité $\vec{u}^2=\vec{v}^2 \quad (1)$.

1[ère] manière :

$(1) \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2=\|\vec{v}\|^2$ (propriété du cours sur les carrés scalaires : $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$)

$\Leftrightarrow \|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$ car $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ sont des réels positifs

2[e] manière :

$(1) \Leftrightarrow \vec{u}^2-\vec{v}^2=0$

$\Leftrightarrow \left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=0$ (identité remarquable scalaire)

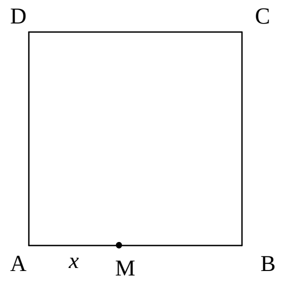
$\Leftrightarrow \vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux

---

III.

Soit ABCD un carré de côté 2. Soit M un point quelconque du segment $[\text{AB}]$. On pose $\text{AM}=x$.

1°) Le but de cette question est d'exprimer le produit scalaire $p=\overrightarrow{\text{MC}}\cdot\overrightarrow{\text{MD}}$ en fonction de x.



Il est demandé de ne rien écrire sur la figure.

On présentera tous les calculs très proprement et sans ratures.

• En observant que l'on peut écrire $\overrightarrow{\text{MC}}=\overrightarrow{\text{MB}}+\overrightarrow{\text{BC}}$ et $\overrightarrow{\text{MD}}=\overrightarrow{\text{MA}}+\overrightarrow{\text{AD}}$ (relation de Chasles), écrire p comme somme de quatre produits scalaires.

$$p=\overrightarrow{\text{MB}}\cdot\overrightarrow{\text{MA}}+\overrightarrow{\text{MB}}\cdot\overrightarrow{\text{AD}}+\overrightarrow{\text{BC}}\cdot\overrightarrow{\text{MA}}+\overrightarrow{\text{BC}}\cdot\overrightarrow{\text{AD}}$$

(écrire très lisiblement et sans ratures)

Il n'y a pas besoin d'écrire des parenthèses autour de chaque produit scalaire.

• Achever le calcul de *p*. On rédigera les explications utiles.

$M \in [AB]$ par hypothèse donc les vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA}$ sont colinéaires de sens contraires.

$\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{MA}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires de même sens.

$p = -x \times (2-x) + 0 + 0 + 2 \times 2$

$p = x^2 - 2x + 4$

3°) On suppose dans cette question que M est le milieu de $[AB]$.
À l'aide de la valeur de *p* obtenue dans ce cas, déterminer la valeur de $\cos \widehat{CMD}$.

M est le milieu de $[AB]$ donc $x = 1$.

On obtient immédiatement $p = 1^2 - 2 \times 1 + 4 = 3$ soit $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 3$ (1).

Les distances MC et MD sont toutes deux égales à $\sqrt{5}$ (utilisation du théorème de Pythagore dans les triangles AMD et BMC).

$(1) \Leftrightarrow MC \times MD \times \cos \widehat{CMD} = 3$

$\Leftrightarrow \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \cos \widehat{CMD} = 3$

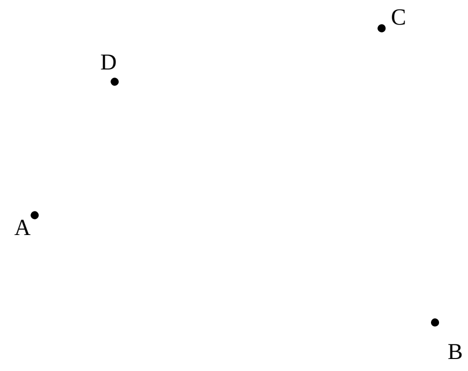
$\Leftrightarrow 5 \cos \widehat{CMD} = 3$

$\Leftrightarrow \cos \widehat{CMD} = \dfrac{3}{5}$

IV.

Soit A, B, C, D quatre points quelconques du plan *P*.
Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1



Construire sur la figure en laissant les traits de construction apparents :
• le point F de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ (1) ;
• le point G de la droite (CD) tel que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{DB}$ (2).

On est obligé de traduire les égalités (1) et (2) afin de pouvoir obtenir des conditions simples à interpréter.

$(1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BC}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CB}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} = 0$ (relation de Chasles)

On interprète cette dernière égalité en disant que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont orthogonaux.
Le point F appartient donc à la perpendiculaire à (AB) passant par C.
Comme $F \in (AB)$, C est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

$(2) \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$

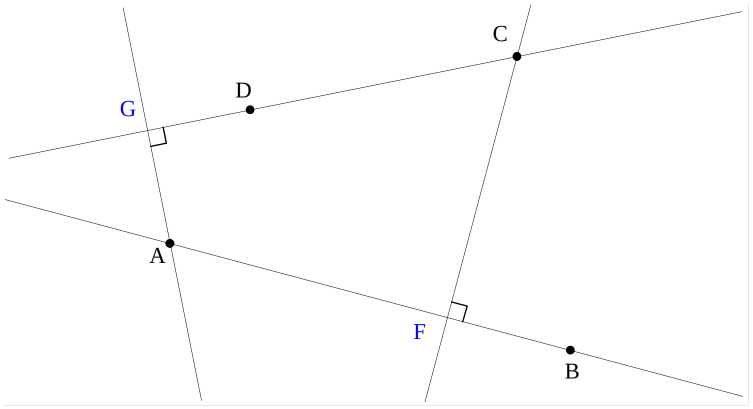
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} \cdot \left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$

G est le projeté orthogonal de A sur la droite (CD).



Partie 2

Dans cette partie, on suppose que le quadrilatère ACBD n'est pas un parallélogramme.
Le but de cette partie est de déterminer l'ensemble E des points M du plan P tels que $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)=0$.

1°) On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et de $[CD]$.
Compléter les égalités suivantes en utilisant les points I et J.

$\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ $\qquad\qquad$ $\forall M \in P \quad \overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MJ}$

On notera que l'on peut écrire ces égalités sans figure et sans savoir où se trouve le point M (qui est le but de cette partie).

Il s'agit d'une propriété du cours sur les vecteurs qui se redémontre de manière évidente en utilisant la relation de Chasles.

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}+\vec{0}=2\overrightarrow{MI}$

2°) Compléter les lignes du cadre ci-dessous par des égalités de produits scalaires.

Soit M un point quelconque du plan P.

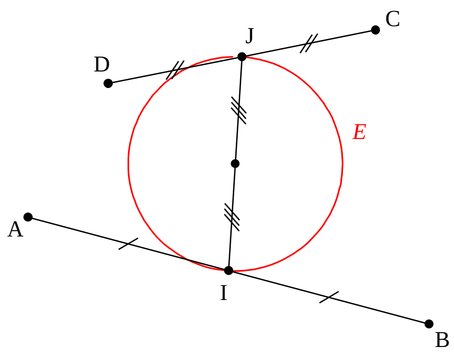
$$\begin{aligned} M \in E &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow \left(2\overrightarrow{MI}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{MJ}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow 4\left(\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}=0 \end{aligned}$$

3°) À partir de la dernière égalité (et en l'interprétant convenablement), formuler une conclusion claire (sans employer le mot « ensemble » et sans parler du point M).

L'ensemble E est le cercle de diamètre $[IJ]$.

On notera que l'hypothèse faite au début de la partie 2 sur le fait que le quadrilatère ACBD n'est pas un parallélogramme intervient ici. En effet, comme ACBD n'est pas un parallélogramme, les points I et J sont distincts.

Il s'agit d'un lieu géométrique de référence (lieu géométrique d'orthogonalité).



V.

Un jeu consiste à lancer 100 fois une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir pile en un lancer soit égale à 0,4.
À chaque lancer, si la pièce tombe sur pile, on gagne 2 euros ; si la pièce tombe sur face, on perd 1 euro.
On note X le nombre de piles obtenus à l'issue des 100 lancers et G le gain algébrique en euros.

1°) Compléter la phrase suivante avec le maximum de précision.

X suit la loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=0,4$.

2°) Exprimer G en fonction de X.

$G=3X-100$ (un seul résultat sous forme réduite)

$$\begin{aligned} G &= 2\times X-(100-X) \\ &= 3X-100 \end{aligned}$$

3°) Calculer la probabilité d'obtenir un gain supérieur ou égal à 40 euros. On donnera la valeur arrondie au millième.
Indication : Chercher les valeurs de X pour lesquelles le gain est supérieur ou égal à 40.

0,093 (un seul résultat, sans égalité)

On cherche la probabilité de l'événement $(G \geqslant 40)$.

$$\begin{aligned} G \geqslant 40 &\Leftrightarrow 3X-100 \geqslant 40 \\ &\Leftrightarrow 3X \geqslant 140 \\ &\Leftrightarrow X \geqslant \frac{140}{3} \end{aligned}$$

Avec la calculatrice, on trouve : $\dfrac{140}{3} = 46,666\underline{6}...$.

Les valeurs de X pour lesquelles on a $\mathrm{G} \geqslant 40$ sont donc 47, 48, 49, 50, …, 98, 99, 100.

On a donc $P(\mathrm{G} \geqslant 40) = P(\mathrm{X} \geqslant 47)$ que l'on peut écrire $P(\mathrm{G} \geqslant 40) = 1 - P(\mathrm{X} \leqslant 46)$.

Avec la calculatrice, on trouve $P(\mathrm{G} \geqslant 40) = 0,092980092...$ [faire $1 - \mathrm{binomFRép}(100, 0.4, 46)$].