TS1

Contrôle du vendredi 24 mars 2017
(50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..…………

Note : ……../ 20

I. (2 points)

Déterminer une écriture exponentielle du nombre complexe $z=-2\text{i}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{5}}$. $z=$.................... (un seul résultat)

II. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

1°) Question de cours

Écrire « la plus belle formule des mathématiques ».

………………………………….. (une seule égalité)

2°) Soit x un réel quelconque et k un entier relatif quelconque.
Démontrer que $\text{e}^{\text{i}(x+k\pi)}=(-1)^k\,\text{e}^{\text{i}x}$. En déduire une expression de $\cos(x+k\pi)$ en fonction de $\cos x$ et une expression de $\sin(x+k\pi)$ en fonction de $\sin x$.

………

………

………

………

………

………

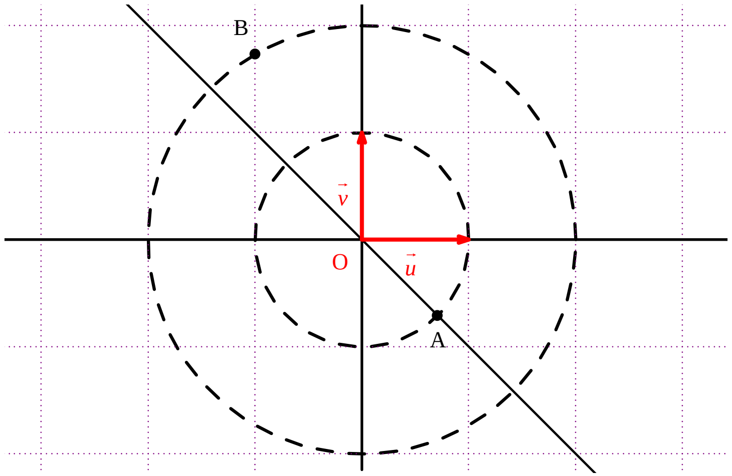
………

………

Dans les exercices **III**, **IV** et **V**, le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(\text{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

III. (4 points : 1°) 1 point + 1 point ; 2°) 1 point + 1 point)

On considère le graphique suivant. Les deux questions sont indépendantes.



1°) Le but de la question est de déterminer par lecture graphique une écriture exponentielle des affixes des points A et B.
Dans chaque cas, compléter les égalités de la première ligne en utilisant le graphique et en déduire une écriture exponentielle des affixes de A et B.

$\text{OA}=$........ et $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\text{OA}})=$............ (2π)	$\text{OB}=$........ et $(\vec{u}\,;\overrightarrow{\text{OB}})=$............ (2π)
$z_{\text{A}}=$..................... (un seul résultat)	$z_{\text{B}}=$..................... (un seul résultat)

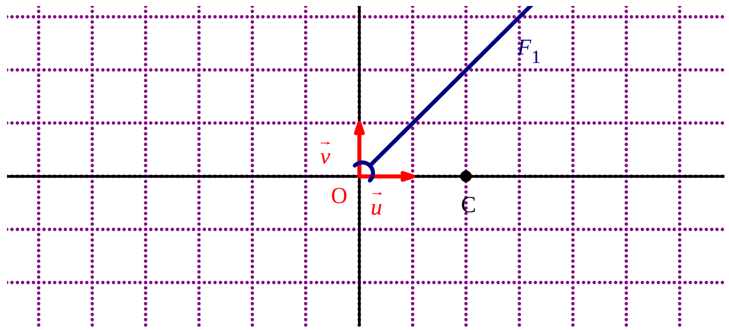
2°) Représenter sur le graphique ci-dessus :

• en bleu l'ensemble E_1 des points M de P d'affixe $\text{e}^{\text{i}\theta}$ lorsque θ décrit l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$;

• en vert l'ensemble E_2 des points M de P d'affixe $2\text{e}^{\text{i}\theta}$ lorsque θ décrit l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{4}\,;\frac{5\pi}{4}\right]$.

IV. (4 points : 1°) 0 point ; 2°) 2 points + 2 points)

On considère le graphique ci-dessous sur lequel on effectuera avec soin et précision les tracés demandés.
Le point C a pour affixe 2.



1°) On note F_1 l'ensemble des points M de P d'affixe z, distincts de O, tels que $\arg\left(\mathrm{i}\overline{z}\right)=\frac{\pi}{4}\ \ (2\pi)$.

Lire et comprendre le raisonnement suivant permettant de déterminer l'ensemble F_1.

Soit M un point quelconque de P d'affixe $z \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in F_1 &\Leftrightarrow \arg\left(\mathrm{i}\overline{z}\right)=\frac{\pi}{4}\ \ (2\pi)\\
&\Leftrightarrow \arg \mathrm{i} + \arg \overline{z} = \frac{\pi}{4}\ \ (2\pi)\\
&\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \arg z = \frac{\pi}{4}\ \ (2\pi)\\
&\Leftrightarrow -\arg z = -\frac{\pi}{4}\ \ (2\pi)\\
&\Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{4}\ \ (2\pi)\\
&\Leftrightarrow \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) = \frac{\pi}{4}\ \ (2\pi)
\end{aligned}$$

2°) Rédiger la recherche des ensembles F_2 et F_3 ainsi définis selon le modèle de la question 1°) puis les tracer.

- F_2 est l'ensemble des points M de P d'affixe z, distincts de C, tels que $\arg(z-2)=\frac{\pi}{2}\ \ (2\pi)$;
- F_3 est l'ensemble des points M de P d'affixe z, distincts de O, tels que $\arg(-z)=\frac{3\pi}{4}\ \ (2\pi)$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

V. (7 points : 1°) a) 1 point ; b) 1 point ; c) 2 points ; d) 2 points ; 2°) 1 point)

À tout point M du plan P, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z'=\left(|z|-2\right)\overline{z}$.
On note U et V les points d'affixes respectives 1 et i. Les deux questions sont indépendantes.

1°) On note A le point d'affixe $\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

a) Donner une écriture exponentielle de l'affixe de A.

$z_{\mathrm{A}}=$ ………………… (un seul résultat)

b) En déduire une écriture exponentielle de l'affixe du point A' associé à A.

$z_{\mathrm{A'}}=$ ………………… (un seul résultat)

c) À l'aide des écritures exponentielles précédentes, compléter les égalités suivantes :

$\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=$ ………… (2π) ; $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right)=$ ………… (2π)

En déduire une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right)$. Présenter les calculs sur deux ou trois lignes.

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

d) En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer la nature du triangle OAA'.

……

……

……

……

2°) Soit M un point quelconque du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 3.
Cocher la proposition exacte.

☐ M' est le symétrique de M par rapport à la droite (OU).
☐ M' est le symétrique de M par rapport à la droite (OV).
☐ M' est le symétrique de M par rapport au point O.

Conseils donnés à l'oral

II.

1°) On attend l'une des deux formes.

2°) On attend deux expressions (première expression en fonction de cos x et de k, deuxième expression en fonction de sin x et de k).

IV.

On n'écrira pas de conclusion.

Corrigé du contrôle du 24-3-2017

I.

Déterminer une écriture exponentielle du nombre complexe $z=-2\text{ie}^{\text{i}\frac{\pi}{5}}$.

$z=2\text{e}^{-\text{i}\frac{3\pi}{10}}$ (un seul résultat)

ou $z=2\text{e}^{\text{i}\frac{17\pi}{10}}$ (un seul résultat)

$$\begin{aligned} z&=-1\times 2\times \text{i}\times \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{5}}\\ &=\text{e}^{\text{i}\pi}\times 2\times \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}\times \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{5}}\\ &=2\times \text{e}^{\text{i}\left(\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)}\\ &=2\times \text{e}^{\text{i}\frac{17\pi}{10}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z&=2\times(-\text{i})\times \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{5}}\\ &=2\times \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}}\times \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{5}}\\ &=2\text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{2}\right)}\\ &=2\text{e}^{-\text{i}\frac{3\pi}{10}}\end{aligned}$$

II.

1°) Question de cours

Écrire « la plus belle formule des mathématiques ».

$\text{e}^{\text{i}\pi}=-1$ (une seule égalité)

2°) Soit x un réel quelconque et k un entier relatif quelconque.
Démontrer que $\text{e}^{\text{i}(x+k\pi)}=(-1)^k\,\text{e}^{\text{i}x}$. En déduire une expression de $\cos(x+k\pi)$ en fonction de $\cos x$ et une expression de $\sin(x+k\pi)$ en fonction de $\sin x$.

$$\begin{aligned}\text{e}^{\text{i}(x+k\pi)}&=\text{e}^{\text{i}x}\times \text{e}^{\text{i}k\pi}\\ &=\text{e}^{\text{i}x}\times\left(\text{e}^{\text{i}\pi}\right)^k\\ &=\text{e}^{\text{i}x}\times(-1)^k\\ &=(-1)^k\,\text{e}^{\text{i}x}\end{aligned}$$

D'une part, $\text{e}^{\text{i}(x+k\pi)}=\cos(x+k\pi)+\text{i}\sin(x+k\pi)$ (définition de $\text{e}^{\text{i}\theta}$).

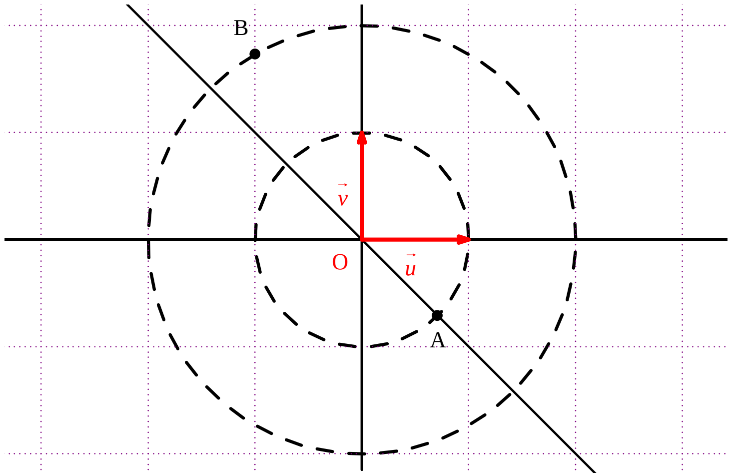
D'autre part, d'après le résultat, que l'on vient d'établir, $\text{e}^{\text{i}(x+k\pi)}=(-1)^k(\cos x+\text{i}\sin x)$.

On identifie les parties réelle et imaginaire.
On obtient ainsi : $\cos(x+k\pi)=(-1)^k\cos x$ et $\sin(x+k\pi)=(-1)^k\sin x$.

Dans les exercices **III**, **IV** et **V**, le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(\text{O},\vec{u},\vec{v})$.

III.

On considère le graphique suivant. Les deux questions sont indépendantes.



1°) Le but de la question est de déterminer par lecture graphique une écriture exponentielle des affixes des points A et B.
Dans chaque cas, compléter les égalités de la première ligne en utilisant le graphique et en déduire une écriture exponentielle des affixes de A et B.

$\text{OA}=1$ et $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\text{OA}}\right)=-\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

$z_{\text{A}}=\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}$ (un seul résultat)

$\text{OB}=2$ et $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\text{OB}}\right)=\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$

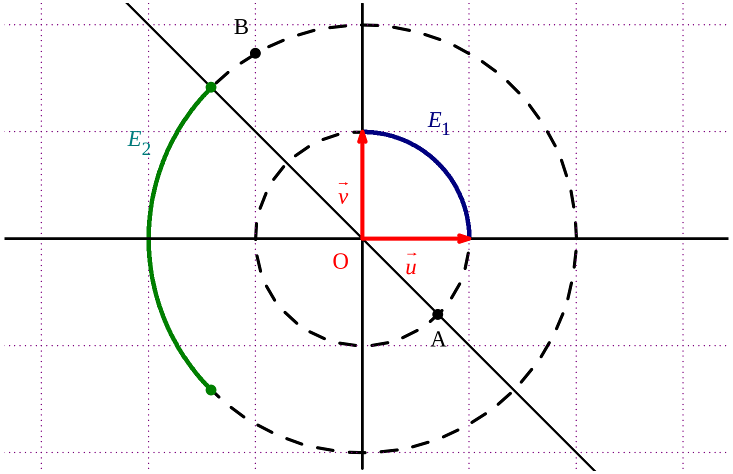
$z_{\text{B}}=2\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$ (un seul résultat)

Pour obtenir une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\text{OB}}\right)$, on peut considérer le point C d'affixe -2.

Le triangle OBC est équilatéral car B est situé sur la médiatrice du segment $[\text{OC}]$.

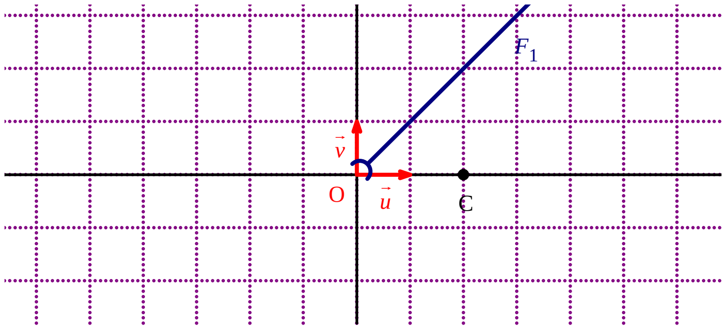
2°) Représenter sur le graphique ci-dessus :

- en bleu l'ensemble E_1 des points M de P d'affixe $\text{e}^{\text{i}\theta}$ lorsque θ décrit l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$;
- en vert l'ensemble E_2 des points M de P d'affixe $2\text{e}^{\text{i}\theta}$ lorsque θ décrit l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{4}\,;\frac{5\pi}{4}\right]$.



IV.

On considère le graphique ci-dessous sur lequel on effectuera avec soin et précision les tracés demandés.
Le point C a pour affixe 2.



1°) On note F_1 l'ensemble des points M de P d'affixe z, distincts de O, tels que $\arg\left(\mathrm{i}\bar{z}\right)=\frac{\pi}{4}\ \ (2\pi)$.

Lire et comprendre le raisonnement suivant permettant de déterminer l'ensemble F_1.

Soit M un point quelconque de P d'affixe $z \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}\in F_1 &\Leftrightarrow \arg\left(\mathrm{i}\bar{z}\right)=\frac{\pi}{4}\ \ (2\pi)\\
&\Leftrightarrow \arg \mathrm{i}+\arg \bar{z}=\frac{\pi}{4}\ \ (2\pi)\\
&\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}-\arg z=\frac{\pi}{4}\ \ (2\pi)\\
&\Leftrightarrow -\arg z=-\frac{\pi}{4}\ \ (2\pi)\\
&\Leftrightarrow \arg z=\frac{\pi}{4}\ \ (2\pi)\\
&\Leftrightarrow \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)=\frac{\pi}{4}\ \ (2\pi)
\end{aligned}
$$

2°) Rédiger la recherche des ensembles F_2 et F_3 ainsi définis selon le modèle de la question 1°) puis les tracer.

- F_2 est l'ensemble des points M de P d'affixe z, distincts de C, tels que $\arg\left(z-2\right)=\frac{\pi}{2}\ \ (2\pi)$;
- F_3 est l'ensemble des points M de P d'affixe z, distincts de O, tels que $\arg\left(-z\right)=\frac{3\pi}{4}\ \ (2\pi)$.

Soit M un point quelconque de P d'affixe $z \neq 2$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}\in F_2 &\Leftrightarrow \arg\left(z-2\right)=\frac{\pi}{2}\ \ (2\pi)\\
&\Leftrightarrow \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{CM}}\right)=\frac{\pi}{2}\ \ (2\pi)
\end{aligned}
$$

On observe en effet que $z-2$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CM}}$.

L'ensemble F_2 est une demi-droite ouverte d'origine C.

Plus précisément, F_2 est la demi-droite ouverte d'origine C dont la direction et le sens sont donnés par le vecteur $\vec{v}$.
Il s'agit d'une demi-droite perpendiculaire à l'axe des réels et donc parallèle à l'axe des imaginaires purs.

Soit M un point quelconque de P d'affixe $z \neq 0$.

1$^{\text{ère}}$ méthode :

Soit M un point quelconque de P d'affixe $z \neq 0$.

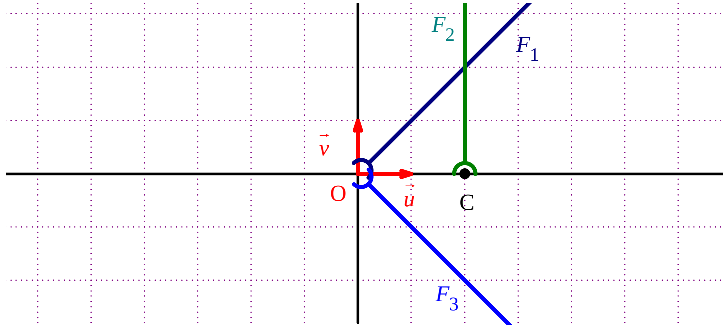
$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}\in F_3 &\Leftrightarrow \arg\left(-z\right)=\frac{3\pi}{4}\ \ (2\pi)\\
&\Leftrightarrow \arg\left(z_{\mathrm{O}}-z\right)=\frac{3\pi}{4}\ \ (2\pi)\\
&\Leftrightarrow \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{MO}}\right)=\frac{3\pi}{4}\ \ (2\pi)
\end{aligned}
$$

2$^{\text{e}}$ méthode :

Soit M un point quelconque de P d'affixe $z \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}\in F_3 &\Leftrightarrow \arg\left(-z\right)=\frac{3\pi}{4}\ \ (2\pi)\\
&\Leftrightarrow \arg z+\pi=\frac{3\pi}{4}\ \ (2\pi)\\
&\Leftrightarrow \arg z=-\frac{\pi}{4}\ \ (2\pi)\\
&\Leftrightarrow \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)=-\frac{\pi}{4}\ \ (2\pi)
\end{aligned}
$$

L'ensemble F_3 est une demi-droite ouverte d'origine O.



Une pénalité de 0,5 point a été appliquée lorsque les points d'arrêt n'ont pas été correctement marqués.

V.

À tout point M du plan *P*, d'affixe *z*, on associe le point M' d'affixe $z' = \left(|z| - 2\right)\overline{z}$.
On note U et V les points d'affixes respectives 1 et i. Les deux questions sont indépendantes.

1°) On note A le point d'affixe $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

a) Donner une écriture exponentielle de l'affixe de A.

$$z_A = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ (un seul résultat)}$$

$$\begin{aligned} z_A &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \\ &= e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

b) En déduire une écriture exponentielle de l'affixe du point A' associé à A.

$$z_{A'} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ (un seul résultat)}$$

1$^{\text{ère}}$ méthode :

$$\begin{aligned} z_{A'} &= \left(|z_A| - 2\right)\overline{z_A} \\ &= (1-2)\,\overline{e^{i\frac{\pi}{3}}} \\ &= -\,\overline{e^{i\frac{\pi}{3}}} \\ &= -\,e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ &= e^{i\pi} \times e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ &= e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

2$^{\text{e}}$ méthode : maladroite (ne correspond pas à ce qui est demandé)

$$\begin{aligned} z_{A'} &= \left(\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} - 2\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= (1-2) \times \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ &= (-1) \times \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ &= e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

c) À l'aide des écritures exponentielles précédentes, compléter les égalités suvantes :

$$\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi) \quad ; \quad \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OA'}\right) = \frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$$

En déduire une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OA'}\right)$. Présenter les calculs sur deux ou trois lignes.

$\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OA'}\right) = \left(\overrightarrow{OA}\,;\vec{u}\right) + \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OA'}\right) \quad (2\pi)$ (relation de Chasles pour les angles orientés)

$\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OA'}\right) = -\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$

$\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OA'}\right) = \dfrac{\pi}{3} \quad (2\pi)$

d) En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer la nature du triangle OAA'.

D'après la forme exponentielle de z_A et de $z_{A'}$, on a : $OA = OA' = 1$.
Donc le triangle OAA' est isocèle en O.

De plus, d'après la question précédente, $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OA'}\right) = \dfrac{\pi}{3} \quad (2\pi)$.
On en déduit que le triangle OAA' est équilatéral.

2°) Soit M un point quelconque du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 3.
Cocher la proposition exacte.
☒ M' est le symétrique de M par rapport à la droite (OU).
☐ M' est le symétrique de M par rapport à la droite (OV).
☐ M' est le symétrique de M par rapport au point O.

$M \in \mathcal{C}$ donc $OM = 3$ d'où $|z| = 3$.
Or $z' = \left(|z| - 2\right)\overline{z}$ donc $z' = (3-2)\overline{z}$ soit $z' = \overline{z}$ d'où le résultat.