1ère S1

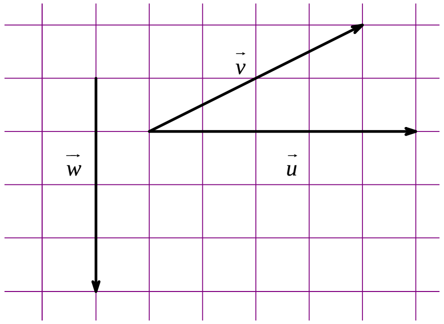
Contrôle du mardi 14 mars 2017 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………..………….

Note : ….. / 20

I. (2 points : 1 point par produit scalaire)

Sur la figure ci-dessous, les carreaux ont pour côté 1. Il est demandé de ne rien écrire sur la figure.



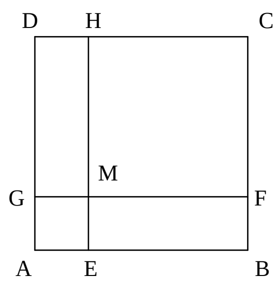
Sans justifier, compléter les égalités suivantes en écrivant un seul résultat à chaque fois.

$\vec{u} \cdot \vec{v} =$ ………..

$\vec{v} \cdot \vec{w} =$ ………..

II. (4 points : 1 point par produit scalaire)

Soit ABCD un carré de côté 1. Soit M un point quelconque du segment [AC].
La droite passant par M et parallèle à (AB) coupe le segment [AD] en G et le segment [BC] en F.
La droite passant par M et parallèle à (AD) coupe le segment [AB] en E et le segment [CD] en H.
On pose $\text{AE} = x$. Il est demandé de ne rien écrire sur la figure.



En utilisant la méthode de projection orthogonale, exprimer les produits scalaires suivants en fonction de x :
$p_1 = \overrightarrow{\text{GH}} \cdot \overrightarrow{\text{EB}}$; $p_2 = \overrightarrow{\text{AD}} \cdot \overrightarrow{\text{FH}}$; $p_3 = \overrightarrow{\text{BD}} \cdot \overrightarrow{\text{GF}}$; $p_4 = \overrightarrow{\text{EH}} \cdot \overrightarrow{\text{FA}}$.

$p_1 =$ …………	$p_2 =$ …………	$p_3 =$ …………	$p_4 =$ …………

III. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points ; 3°) 2 points)

Une classe compte 30 élèves dont 20 filles. À chaque cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard un élève de la classe, sans se rappeler quels élèves il a déjà interrogés.
On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de filles interrogées durant 10 cours consécutifs.

1°) Compléter la phrase suivante en donnant toutes les précisions utiles.

X suit la loi ……………………………………………………………………...……………………………….………

…………………………………………..………..…………………………………………………………………………..

2°) Quelle est la probabilité que, sur 10 cours consécutifs, soient interrogées exactement cinq filles ?
Présenter les calculs et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

…………………… (un seul résultat, sans égalité)

……………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………..……………………………………………………

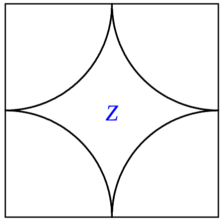
……………………………………………………………………..……………………………………………………

3°) Cette fois, on s'intéresse au nombre de filles interrogées durant n cours consécutifs où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Quelle est la probabilité qu'au moins une fille soit interrogée ?

………………………………… (une seule expression sous la forme la plus simple possible)

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point + 1 point)

On considère un carré de côté 2 à l'intérieur duquel on a tracé quatre quarts de cercles de rayons 1 ayant pour centres les sommets du carré, définissant ainsi une zone centrale notée *Z*.



On choisit 100 points au hasard à l'intérieur du carré.

On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de points qui appartiennent à la zone *Z*.

1°) Compléter la phrase suivante en donnant toutes les précisions utiles.

X suit la loi ……………………………………………………………………………………………………

……

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
On attend les valeurs exactes sous forme développée la plus simple possible.

$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = $ ……………… $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = $ ………………

V. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Un institut de sondage a été mandaté par un organisme afin de réaliser une enquête téléphonique.
On suppose que la probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est de 0,35.
Pour ce sondage, l'institut compte appeler 500 personnes.
On donnera les valeurs arrondies au millième.

1°) Quelle est la probabilité qu'au moins 200 personnes acceptent de répondre ?

…………………….. (un seul résultat, sans égalité)

2°) Quelle est la probabilité qu'entre 160 et 190 personnes acceptent de répondre, ces deux valeurs étant comprises ?

…………………….. (un seul résultat, sans égalité)

VI. (2 points : 1 point par paramètre)

X est une variable aléatoire d'espérance mathématique 10 et de variance 8. On sait que X suit la loi binomiale de paramètres *n* et *p*.
Calculer *n* et *p*.

On s'efforcera de rédiger avec concision et précision.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Bonus (1 point) :

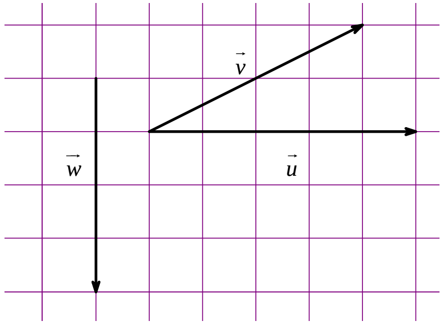
On reprend l'énoncé de l'exercice **V**.
Pour tout entier naturel $k \leqslant 500$, on note E_k l'événement : « exactement *k* personnes acceptent de répondre ».
Pour quelle valeur de *k* la probabilité de E_k est-elle maximale ?

…………… (un seul résultat)

Corrigé du contrôle du 14-3-2017

I.

Sur la figure ci-dessous, les carreaux ont pour côté 1. Il est demandé de ne rien écrire sur la figure.



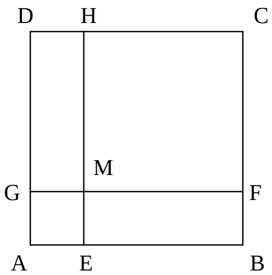
Sans justifier, compléter les égalités suivantes en écrivant un seul résultat à chaque fois.

$\vec{u} \bullet \vec{v} = 20$ $\qquad$ $\vec{v} \bullet \vec{w} = -8$

On utilise la méthode de projection orthogonale dans chaque cas.

II.

Soit ABCD un carré de côté 1. Soit M un point quelconque du segment [AC].
La droite passant par M et parallèle à (AB) coupe le segment [AD] en G et le segment [BC] en F.
La droite passant par M et parallèle à (AD) coupe le segment [AB] en E et le segment [CD] en H.
On pose $\text{AE} = x$. Il est demandé de ne rien écrire sur la figure.



En utilisant la méthode de projection orthogonale, exprimer les produits scalaires suivants en fonction de x :
$p_1 = \overrightarrow{\text{GH}} \bullet \overrightarrow{\text{EB}}$; $p_2 = \overrightarrow{\text{AD}} \bullet \overrightarrow{\text{FH}}$; $p_3 = \overrightarrow{\text{BD}} \bullet \overrightarrow{\text{GF}}$; $p_4 = \overrightarrow{\text{EH}} \bullet \overrightarrow{\text{FA}}$.

$p_1 = x(1-x)$ ou $p_1 = x - x^2$	$p_2 = 1 - x$	$p_3 = -1$	$p_4 = -x$

$p_4 = \overrightarrow{\text{EH}} \bullet \overrightarrow{\text{FA}} = \overrightarrow{\text{EH}} \bullet \overrightarrow{\text{ME}} = -\text{EH} \times \text{ME} = -1 \times x = -x$

III.

Une classe compte 30 élèves dont 20 filles. À chaque cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard un élève de la classe, sans se rappeler quels élèves il a déjà interrogés.
On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de filles interrogées durant 10 cours consécutifs.

1°) Compléter la phrase suivante en donnant toutes les précisions utiles.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

2°) Quelle est la probabilité que, sur 10 cours consécutifs, soient interrogées exactement cinq filles ?
Présenter les calculs et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$\dfrac{896}{5651}$ (un seul résultat, sans égalité)

$P(\text{X} = 5) = \dbinom{10}{5} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^5 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^5$ (formule de la loi binomiale)

$= 252 \times \dfrac{2^5}{3^5} \times \dfrac{1}{3^5}$ (on obtient $\dbinom{10}{5} = 252$ grâce à la calculatrice)

$= \dfrac{252 \times 32}{3^{10}}$

$= \dfrac{252 \times 32}{3^{10}}$

$= \dfrac{8064}{3^{10}}$

$= \dfrac{\cancel{9} \times 896}{\cancel{3^2} \times 3^8}$

$= \dfrac{896}{3^8}$

$= \dfrac{896}{3^8}$

$= \dfrac{896}{6561}$

On peut aussi tout simplement utiliser la touche de la calculatrice permettant de simplifier une fraction.

3°) Cette fois, on s'intéresse au nombre de filles interrogées durant n cours consécutifs où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Quelle est la probabilité qu'au moins une fille soit interrogée ?

$1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ ou $1 - \dfrac{1}{3^n}$ (une seule expression sous la forme la plus simple possible)

$$P(\text{« au moins une fille est interrogée »}) = 1 - P(\text{« aucune fille n'est interrogée »})$$

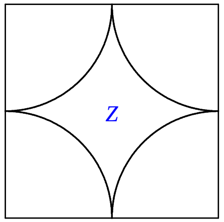
$$= 1 - P(\text{« seuls des garçons ont été interrogés »})$$

$$= 1 - \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \ldots \times \frac{1}{3}}_{n \text{ facteurs}}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

IV.

On considère un carré de côté 2 à l'intérieur duquel on a tracé quatre quarts de cercles de rayons 1 ayant pour centres les sommets du carré, définissant ainsi une zone centrale notée *Z*.



On choisit 100 points au hasard à l'intérieur du carré.

On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de points qui appartiennent à la zone *Z*.

J'avais mis cet exercice en pensant au fait que nous étions le « pi-day ».

1°) Compléter la phrase suivante en donnant toutes les précisions utiles.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = \dfrac{4-\pi}{4}$ (ou $p = 1 - \dfrac{\pi}{4}$).

$$p = \frac{\text{aire de } Z}{\text{aire du carré}}$$

aire de Z = aire du carré – aire des 4 quarts de disques

Les quatre quarts de disques forment un disque de rayon 1.

Rappel : L'aire d'un disque de rayon R est égale à πR^2.

Donc aire de Z = aire du carré – aire d'un disque de rayon 1.
On obtient donc aire de $Z = 4 - \pi$.

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X. On attend les valeurs exactes sous forme développée la plus simple possible.

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 100 - 25\pi \qquad \mathrm{V}(\mathrm{X}) = 25\pi - \frac{25\pi^2}{4}$$

On applique les formules du cours donnant l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale.

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 100 \times \frac{4-\pi}{4} = 25(4-\pi) = 100 - 25\pi$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = 100 \times \frac{4-\pi}{4} \times \left(1 - \frac{4-\pi}{4}\right) = (100 - 25\pi) \times \frac{\pi}{4} = 25\pi - \frac{25\pi^2}{4}$$

V.

Un institut de sondage a été mandaté par un organisme afin de réaliser une enquête téléphonique.
On suppose que la probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est de 0,35.
Pour ce sondage, l'institut compte appeler 500 personnes.
On donnera les valeurs arrondies au millième.

1°) Quelle est la probabilité qu'au moins 200 personnes acceptent de répondre ?

0,011 (un seul résultat, sans égalité)

On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de personnes qui acceptent de répondre.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,35$.

On calcule $P(\mathrm{X} \geqslant 200) = 1 - P(\mathrm{X} \leqslant 199)$.

Avec la calculatrice, on obtient : $P(\mathrm{X} \geqslant 200) = 0,011326671...$.

2°) Quelle est la probabilité qu'entre 160 et 190 personnes acceptent de répondre, ces deux valeurs étant comprises ?

0,854 (un seul résultat, sans égalité)

On a : $P(160 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 190) = P(\mathrm{X} \leqslant 190) - P(\mathrm{X} \leqslant 159)$.
Avec la calculatrice, on obtient : $P(160 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 190) = 0,853967422....$

VI.

X est une variable aléatoire d'espérance mathématique 10 et de variance 8. On sait que X suit la loi binomiale de paramètres *n* et *p*.
Calculer *n* et *p*.

On a : $n\times p=10\ (1)$ et $n\times p\times(1-p)=8\ (2)$.

Compte tenu de (1), (2) donne alors $10\times(1-p)=8$ d'où $1-p=0,8$ ce qui donne $p=0,2$.

(1) donne alors $n\times 0,2=10$ soit $n=\dfrac{10}{0,2}$ et l'on en déduit que $n=50$.

Bonus :

On reprend l'énoncé de l'exercice **V**.
Pour tout entier naturel $k\leqslant 500$, on note E_k l'événement : « exactement *k* personnes acceptent de répondre ».
Pour quelle valeur de *k* la probabilité de E_k est-elle maximale ?

175 (un seul résultat)

L'espérance de X est égale à 175. Ce résultat est un entier.
On vérifie ensuite grâce à la table de la loi de probabilité de X que le maximum de la probabilité de $P(\mathrm{X}=k)$ est atteint pour $k=175$.