$1^{\text{ère}}$ S1

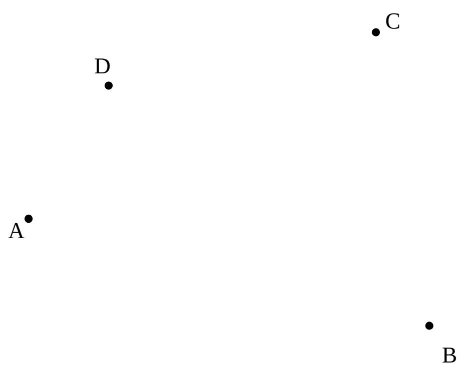
Contrôle du mardi 7 mars 2017 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………….…………

Note : ….. / 20

I. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On considère la figure ci-dessous sur laquelle on a placé quatre point A, B, C, D.



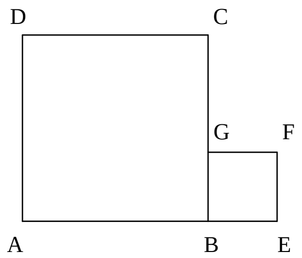
1°) Quel est le signe de $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$? Répondre sans justifier.

…………………………………… (une seule réponse sans faire de phrase)

2°) Construire sur la figure le point E de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$ et le point F de la droite (CD) tel que $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

II. (4 points : 1 point par produit scalaire)

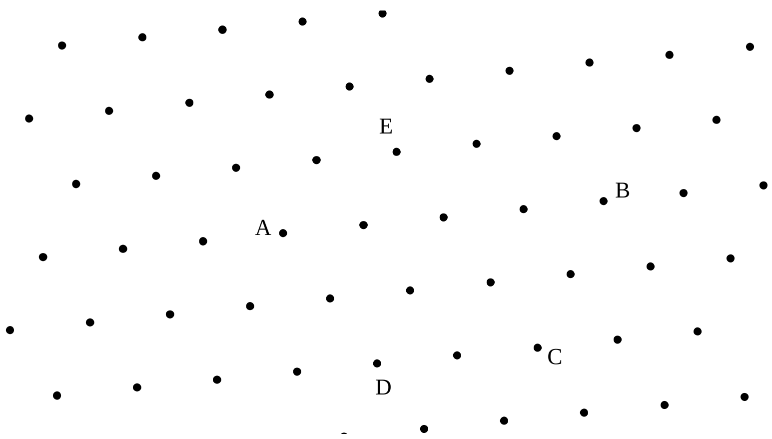
On considère la figure ci-contre où ABCD est un carré de côté a et BEFG est un carré de côté b, a et b étant deux réels strictement positifs tels que $a > b$.
Il est demandé de ne rien écrire sur la figure.
Exprimer les produits scalaires suivants en fonction de a et b :
$p_1 = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BE}$; $p_2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{FB}$; $p_3 = \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{BG}$; $p_4 = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BF}$.



$p_1 =$ …………	$p_2 =$ …………	$p_3 =$ …………	$p_4 =$ …………

III. (7 points : 1°) 4 points ; 2°) 3 points)

On considère un réseau pointé dont la maille élémentaire est un triangle équilatéral de côté 1.
Les points A, B, C, D, E sont des points du réseau placés comme l'indique la figure ci-dessous.



1°) Calculer les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} =$ ……… $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} =$ ……… $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DA} =$ ……… $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BC} =$ ………

On détaillera sur les lignes qui suivent le calcul de $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BC}$ (en utilisant les notations géométriques adéquates).

……

……

……

……

……

……

……

……

……

2°) Placer en vert sur la figure les points F, G, H ainsi définis :

- les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires de même sens et $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC} = 2$;
- les vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires de sens contraires et $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{DC} = -3$;
- les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires de même sens et $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} = 1$.

IV. (2 points)

Un magazine de protection du consommateur a fait une étude sur l'acidité contenue dans un ensemble de boissons commercialisées en grandes surfaces (sodas, eaux minérales, jus de fruit) :

pH	$[2\,;3[$	$[3\,;4[$	$[4\,;5[$	$[5\,;6{,}6[$	$[6{,}6\,;7{,}4[$
Nombre de boissons	22	10	3	4	20

Pour les calculs demandés, on prendra pour valeurs le centre des classes.

Calculer la moyenne de la série. On donnera d'abord la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

…………… (un seul résultat sans égalité) …………… (un seul résultat sans égalité)

Calculer l'écart-type de la série. On donnera d'abord la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

…………… (un seul résultat sans égalité) …………… (un seul résultat sans égalité)

V. (3 points : 1 point par réponse)

On relève les performances d'un perchiste athlète de haut niveau au cours de ses 50 derniers sauts.

Hauteur des sauts (en mètres)	4,60	4,70	4,75	4,80	4,85	4,90	4,95	5,00	5,05	5,10	5,15	5,20
Nombre de sauts	2	4	5	5	4	5	2	5	4	5	3	6

Déterminer la médiane, le premier et le troisième quartile de cette série statistique. Écrire l'unité à chaque fois.

Me = ……….. Q_1 = ……….. Q_3 = ………..

VI. (1 point)

On considère une pyramide de sommet S dont la base est un carré ABCD de côté a et telle que toutes les faces ont latérales sont des triangles équilatéraux de côté a où a est un réel strictement positifs.
Exprimer l'aire totale de la pyramide en fonction de a.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Consignes orales

III.

1°)

● Ne pas introduire de nouveaux points.

● Utiliser des mesures d'angles en degrés.

● Rappel : Le cosinus de 35° se note cos 35° (sans parenthèses, avec l'unité).

2°) Les tracés géométriques (segments, droites…) ainsi que les codages sont autorisés.

IV.

Une valeur exacte est donnée sous forme d'une fraction ou avec une racine carrée mais pas avec des petits points.

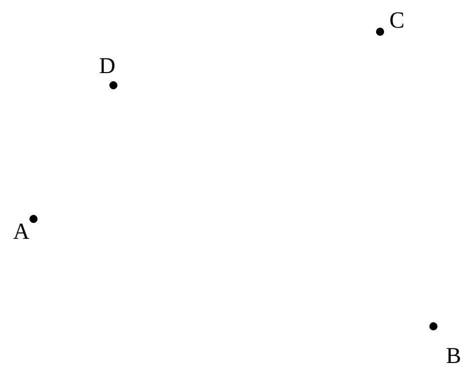
VI.

Avant de commencer les calculs, écrire : « Soit $\mathscr{A}$ l'aire totale de la pyramide. »

Corrigé du contrôle du 7-3-2017

I.

On considère la figure ci-dessous sur laquelle on a placé quatre point A, B, C, D.

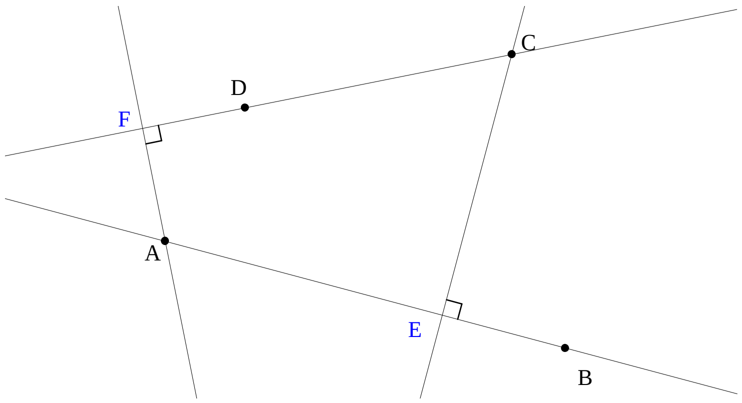


1°) Quel est le signe de $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$? Répondre sans justifier.

négatif (une seule réponse sans faire de phrase)

On observe en effet sur la figure que l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ est obtus.

2°) Construire sur la figure le point E de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$ et le point F de la droite (CD) tel que $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont orthogonaux. Par suite, $(AB) \perp (CE)$.

On construit la perpendiculaire à (AB) passant par C.

On peut dire que E est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux. Par suite, $(AF) \perp (CD)$.

On construit la perpendiculaire à (CD) passant par A.

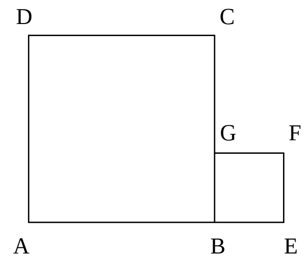
On peut dire que F est le projeté orthogonal de A sur la droite (CD).

Sur la figure, on trace donc : - les droites (AB) et (CD) ;

- la perpendiculaire à (AB) passant par C ;
- la perpendiculaire à (CD) passant par A.

On code les angles droits.

II.



On considère la figure ci-contre où ABCD est un carré de côté a et BEFG est un carré de côté b, a et b étant deux réels strictement positifs tels que $a > b$.
Il est demandé de ne rien écrire sur la figure.
Exprimer les produits scalaires suivants en fonction de a et b :
$p_1 = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BE}$; $p_2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{FB}$; $p_3 = \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{BG}$; $p_4 = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BF}$.

$p_1 = -ab$	$p_2 = -2ab$	$p_3 = -b(a-b)$	$p_4 = 0$

Les droites (AC) et (BF) coupent toutes deux la droite (AE) et les angles correspondants mesurent tous deux 45° donc elles sont parallèles.

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{FB}$ sont colinéaires de sens contraires.

$p_2 = -AC \times FB$

$= -a\sqrt{2} \times b\sqrt{2}$ (on utilise la formule donnant la diagonale d'un carré)

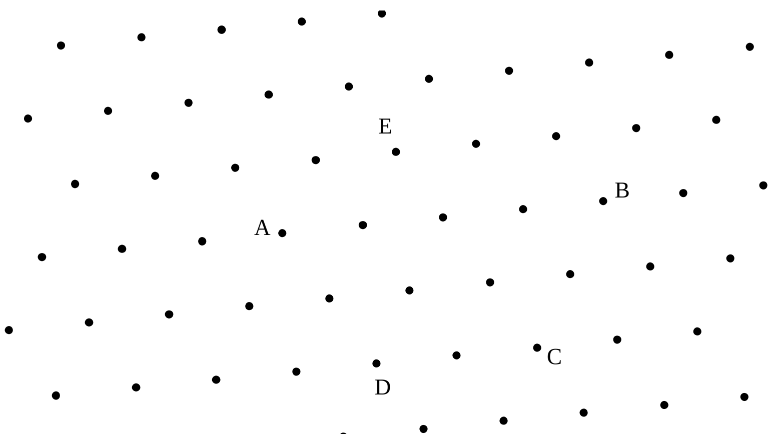
$= -2ab$

$p_3 = b^2 - ab$ (autre forme possible du résultat)

$p_4 = 0$ par orthogonalité des vecteurs ($\widehat{FBD} = \widehat{FBG} + \widehat{GBD} = 45° + 45° = 90°$)

III.

On considère un réseau pointé dont la maille élémentaire est un triangle équilatéral de côté 1.
Les points A, B, C, D, E sont des points du réseau placés comme l'indique la figure ci-dessous.



1°) Calculer les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CE}=-6$ $\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{AB}=4$ $\overrightarrow{CB}\bullet\overrightarrow{DA}=2$ $\overrightarrow{EC}\bullet\overrightarrow{BC}=3$

On détaillera sur les lignes qui suivent le calcul de $\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EC}\bullet\overrightarrow{BC}$ (en utilisant les notations géométriques adéquates).

$$\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{AB}=AD\times AB\times\cos\widehat{BAD}$$
$$=2\times4\times\cos 60°$$
$$=\cancel{2}\times4\times\frac{1}{\cancel{2}}$$
$$=4$$

$$\overrightarrow{EC}\bullet\overrightarrow{BC}=EC\times BC\times\cos 60°$$
$$=3\times\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}$$
$$=3$$

2°) Placer en vert sur la figure les points F, G, H ainsi définis :

• les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires de même sens et $\overrightarrow{AF}\bullet\overrightarrow{BC}=2$;

• les vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires de sens contraires et $\overrightarrow{EG}\bullet\overrightarrow{DC}=-3$;

• les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires de même sens et $\overrightarrow{AH}\bullet\overrightarrow{CB}=1$.

• Les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires de même sens donc F appartient à la demi-droite ouverte définie par son origine A et le vecteur $\overrightarrow{CD}$.

On observe sur la figure que l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BC}$ mesure 60°.
La condition $\overrightarrow{AF}\bullet\overrightarrow{BC}=2$ permet donc d'écrire $AF\times BC\times\cos 60°=2$ (1).

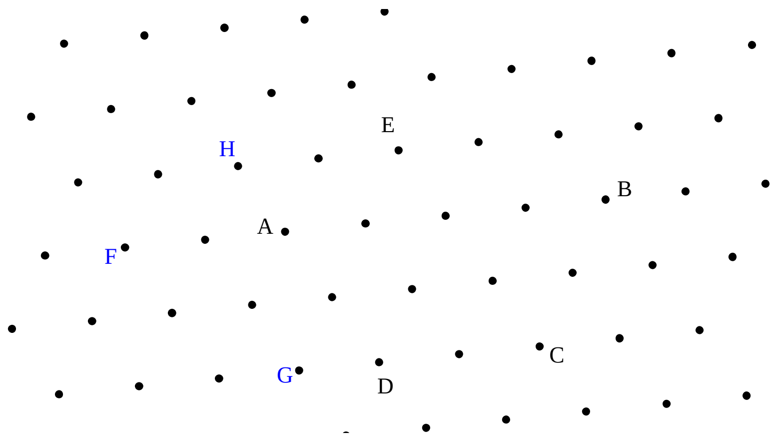
(1) donne $AF\times\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}=2$ d'où $AF=2$ ce qui permet de placer F sur la figure.

• Les vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires de sens contraires donc G appartient à la demi-droite ouverte définie par son origine E et le vecteur $\overrightarrow{BC}$.
On observe sur la figure que l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{DC}$ mesure 120°.
La condition $\overrightarrow{EG}\bullet\overrightarrow{DC}=-3$ permet donc d'écrire $EG\times DC\times\cos120°=-3$ (2).

(2) donne $EG\times\cancel{2}\times\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)=-3$ d'où $EG=3$ ce qui permet de placer G sur la figure.

• Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires de même sens donc H appartient à la demi-droite ouverte définie par son origine A et le vecteur $\overrightarrow{CE}$.
On observe sur la figure que l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$ mesure 60°.
La condition $\overrightarrow{AH}\bullet\overrightarrow{CB}=1$ permet donc d'écrire $AH\times CB\times\cos 60°=2$ (3).

(3) donne $AH\times\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}=1$ d'où $AH=1$ ce qui permet de placer H sur la figure.



IV.

Un magazine de protection du consommateur a fait une étude sur l'acidité contenue dans un ensemble de boissons commercialisées en grandes surfaces (sodas, eaux minérales, jus de fruit) :

pH	$[2\,;3[$	$[3\,;4[$	$[4\,;5[$	$[5\,;6{,}6[$	$[6{,}6\,;7{,}4[$
Nombre de boissons	22	10	3	4	20

Pour les calculs demandés, on prendra pour valeurs le centre des classes.

Calculer la moyenne de la série. On donnera d'abord la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

$\frac{266{,}7}{59}$ (un seul résultat sans égalité)

4,52 (un seul résultat sans égalité)

Calculer l'écart-type de la série. On donnera d'abord la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

$\dfrac{\sqrt{13554,4}}{59}$ (un seul résultat sans égalité)

$1{,}97$ (un seul résultat sans égalité)

L'effectif total est 59.

$$\text{moyenne} = \frac{2,5\times22+3,5\times10+4,5\times3+5,8\times4+7\times20}{59}$$
$$= \frac{266,7}{59}$$

Avec la calculatrice, on obtient : $\text{moyenne} = 4,52033898...$.

$$\text{variance} = \frac{2,5^2\times22+3,5^2\times10+4,5^2\times3+5,8^2\times4+7^2\times20}{59} - \left(\frac{266,7}{59}\right)^2$$
$$= \frac{1435,31}{59} - \left(\frac{266,7}{59}\right)^2$$
$$= \frac{1435,31\times59-266,7^2}{59^2}$$
$$= \frac{13554,4}{59^2} \quad \left(\text{écriture } \text{variance} = \frac{13554,4}{3481} \text{ inutile}\right)$$

$$\text{écart-type} = \sqrt{\text{variance}}$$
$$= \sqrt{\frac{13554,4}{59^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{13554,4}}{59}$$

Avec la calculatrice, on obtient : $\text{écart-type} = 1,97327737...$.

V.

On relève les performances d'un perchiste athlète de haut niveau au cours de ses 50 derniers sauts.

Hauteur des sauts (en mètres)	4,60	4,70	4,75	4,80	4,85	4,90	4,95	5,00	5,05	5,10	5,15	5,20
Nombre de sauts	2	4	5	5	4	5	2	5	4	5	3	6

Déterminer la médiane, le premier et le troisième quartile de cette série statistique. Écrire l'unité à chaque fois.

$\text{Me} = 4,925$ m $\qquad Q_1 = 4,80$ m $\qquad Q_3 = 5,10$ m

$$\text{Me} = \frac{25^e \text{ valeur} + 26^e \text{ valeur}}{2}$$
$$= \frac{4,90+4,95}{2}$$
$$= 4,925 \text{ m}$$

$\dfrac{50}{4} = 12,5$ donc

$Q_1 = 13^e$ valeur

$Q_1 = 4,80$ m

$\dfrac{3\times50}{4} = 37,5$ donc

$Q_3 = 38^e$ valeur

$Q_3 = 5,10$ m

On utilise les effectifs cumulés croissants.

Hauteur des sauts (en mètres)	4,60	4,70	4,75	4,80	4,85	4,90	4,95	5,00	5,05	5,10	5,15	5,20
Nombre de sauts	2	4	5	5	4	5	2	5	4	5	3	6
Effectif cumulé croissant	2	6	11	16	20	25	27	32	36	41	44	50

VI.

On considère une pyramide de sommet S dont la base est un carré ABCD de côté a et telle que toutes les faces ont latérales sont des triangles équilatéraux de côté a où a est un réel strictement positifs.
Exprimer l'aire totale de la pyramide en fonction de a.

On commence par faire une figure en perspective de la pyramide. On peut éventuellement faire un patron comme l'a fait un élève.

Soit $\mathscr{A}$ l'aire totale de la pyramide.

Par définition, $\mathscr{A}$ est égale à la somme des aires de toutes les faces.

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_{\text{ABCD}} + \mathscr{A}_{\text{SAB}} + \mathscr{A}_{\text{SBC}} + \mathscr{A}_{\text{SCD}} + \mathscr{A}_{\text{SAD}}$$
$$= \mathscr{A}_{\text{ABCD}} + 4\mathscr{A}_{\text{SAB}}$$
$$= a^2 + 4\times\frac{a\times\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} \quad \text{(on utilise la formule donnant la hauteur d'un triangle équilatéral de côté } a\text{)}$$
$$= a^2 + 4\times\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}{2}$$
$$= a^2 + \cancel{4}\times\frac{a^2\sqrt{3}}{\cancel{4}}$$
$$= a^2 + a^2\sqrt{3}$$
$$= a^2\left(1+\sqrt{3}\right)$$