La récurrence double

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par ses deux premiers termes $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = 3^n - 2^n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la phrase $P(n)$: « $u_n = 3^n - 2^n$ ».

• Démontrons que les phrases $P(0)$ et $P(1)$ soient vraies.

Par hypothèse $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

Donc on peut écrire $u_0 = 3^0 - 2^0$ et $u_1 = 3^1 - 2^1$.

• Considérons un entier naturel k tel que les phrases $P(k)$ et $P(k+1)$ soient vraies c'est-à-dire $u_k = 3^k - 2^k$ et $u_{k+1} = 3^{k+1} - 2^{k+1}$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+2)$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+2} = 3^{k+2} - 2^{k+2}$.

$$
\begin{aligned}
u_{k+2} &= 5u_{k+1} - 6u_k \\
&= 5\left(3^{k+1} - 2^{k+1}\right) - 6\left(3^k - 2^k\right) \\
&= 5 \times 3^{k+1} - 5 \times 2^{k+1} - 2 \times 3 \times 3^k + 2 \times 3 \times 2^k \\
&= 3^{k+1}(5-2) - 2^{k+1}(5-3) \\
&= 3^{k+2} - 2^{k+2}
\end{aligned}
$$

Donc la phrase $P(k+2)$ est vraie.

On a vérifié que les phrases $P(0)$ et $P(1)$ étaient vraies et que si les phrases $P(k)$ et $P(k+1)$ sont vraies pour un entier naturel k alors la phrase $P(k+2)$ est vraie.
Donc par le théorème de la récurrence double, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Il peut arriver que l'on soit obligé de faire des récurrences triples, quadruples.
On rédige sur le même modèle que pour une récurrence double.

Exercices :

$\boxed{\mathbf{1}}$ On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par ses deux premiers termes $u_0 = 2$ et $u_1 = 6$ par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 4u_n$.

Démontrer que pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 2^n.