1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 28 février 2017 (40 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………..……..…………

Note : ….. / 20

I. (6 points)

Déterminer sans justifier le meilleur encadrement :

a) de $\cos x$ pour $x \in \left[-\dfrac{2\pi}{3} ; -\dfrac{\pi}{2}\right]$; b) de $\sin x$ pour $x \in \left[-\dfrac{4\pi}{3} ; -\dfrac{2\pi}{3}\right]$; c) de $\sin x$ pour $x \in \left[\dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

On utilisera le cercle trigonométrique.

a) …………………………………… b) …………………………………… c) ……………………………………

II. (10 points : 1°) 4 points ; 2°) 6 points)

Dans tout l'exercice, x désigne un réel quelconque.

1°) Calculer l'expression $A = 5\cos\left(\dfrac{7\pi}{2} - x\right) - 3\sin\left(x + \dfrac{25\pi}{2}\right) + 2\cos(x - 301\pi)$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$.

………

………

………

………

………

………

………

2°) Simplifier expressions suivantes :

$B = \sin^2(3\pi - x) + \cos^2(3\pi + x)$;

$C = \cos(\pi + x)\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \sin^2(-x)$;

$D = \cos x \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi - x)\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

III. (4 points : 2 points + 2 points)

Soit a le réel de l'intervalle $\left[-\pi ; -\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos^2 a = \dfrac{9}{25}$.

Calculer les valeurs exactes de $\cos a$ et de $\sin a$.

………

………

………

………

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 28-2-2017

I.

Déterminer sans justifier le meilleur encadrement :

a) de $\cos x$ pour $x \in \left[-\dfrac{2\pi}{3} ; -\dfrac{\pi}{2}\right]$; b) de $\sin x$ pour $x \in \left[-\dfrac{4\pi}{3} ; -\dfrac{2\pi}{3}\right]$; c) de $\sin x$ pour $x \in \left[\dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

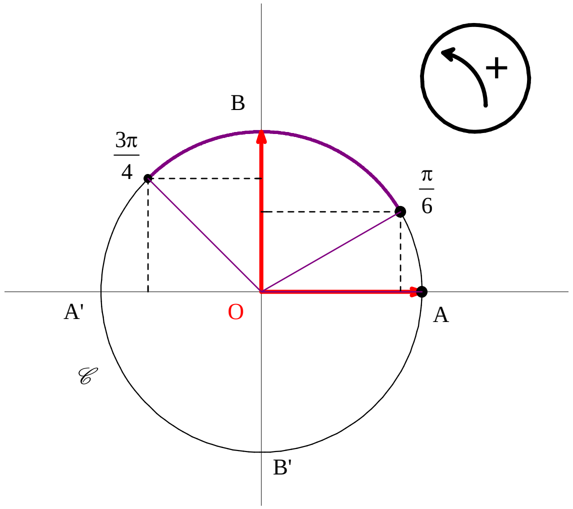
On utilisera le cercle trigonométrique.

a) $-\dfrac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant 0$ b) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \sin x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\dfrac{1}{2} \leqslant \sin x \leqslant 1$

On fait un cercle trigonométrique dans chaque cas. On prend le maximum et le minimum à chaque fois.

Attention, dans le c), il n'y a pas d'erreur.

On trace un cercle trigonométrique. Pour $x \in \left[\dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{3\pi}{4}\right]$, la valeur minimale de $\sin x$ est $\dfrac{1}{2}$ et la valeur maximale de $\sin x$ est 1.



II.

Dans tout l'exercice, x désigne un réel quelconque.

1°) Calculer l'expression $A = 5\cos\left(\dfrac{7\pi}{2} - x\right) - 3\sin\left(x + \dfrac{25\pi}{2}\right) + 2\cos(x - 301\pi)$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$.

$$
\begin{aligned}
A &= 5\cos\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) - 3\sin\left(x + \frac{25\pi}{2}\right) + 2\cos(x - 301\pi)\\
&= 5\cos\left(\frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - x\right) - 3\sin\left(x + \frac{24\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos(x - 302\pi + \pi)\\
&= 5\cos\left(4\pi - \frac{\pi}{2} - x\right) - 3\sin\left(x + 12\pi + \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos(x - 302\pi + \pi)\\
&= 5\cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) - 3\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos(x + \pi)\\
&= 5\cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right] - 3\cos x - 2\cos x\\
&= 5\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 5\cos x\\
&= -5\sin x - 5\cos x
\end{aligned}
$$

2°) Simplifier expressions suivantes :

$B = \sin^2(3\pi - x) + \cos^2(3\pi + x)$;

$C = \cos(\pi + x)\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \sin^2(-x)$;

$D = \cos x \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi - x)\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$.

$$
\begin{aligned}
B &= \sin^2(3\pi - x) + \cos^2(3\pi + x)\\
&= \sin^2(2\pi + \pi - x) + \cos^2(2\pi + \pi + x)\\
&= \sin^2(\pi - x) + \cos^2(\pi + x)\\
&= \left[\sin(\pi - x)\right]^2 + \left[\cos(\pi + x)\right]^2 \quad \text{(étape indispensable pour ne pas se tromper)}\\
&= (\sin x)^2 + (-\cos x)^2\\
&= (\sin x)^2 + (\cos x)^2\\
&= \sin^2 x + \cos^2 x\\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C &= \cos(\pi + x)\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin^2(-x)\\
&= -\cos x \times \cos x - (\sin(-x))^2\\
&= -\cos^2 x - (\sin x)^2\\
&= -\cos^2 x - \sin^2 x\\
&= -(\cos^2 x + \sin^2 x)\\
&= -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D &= \cos x \times (-\sin x) + \sin x \times \cos x\\
&= \cancel{-\sin x \times \cos x} + \cancel{\sin x \times \cos x}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Beaucoup d'élèves n'ont pas bien su gérer les puissances et ont oublié de faire une étape de réécriture.

III.

Soit a le réel de l'intervalle $\left[-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos^2 a=\frac{9}{25}$.

Calculer les valeurs exactes de $\cos a$ et de $\sin a$.

$\cos^2 a=\frac{9}{25}$ donc $\cos a=\frac{3}{5}$ ou $\cos a=-\frac{3}{5}$.

De plus, $a\in\left[-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos a\leqslant 0$.

On en déduit que $\cos a=-\frac{3}{5}$.

D'après la relation fondamentale, on a : $\cos^2 a+\sin^2 a=1$.

On en déduit que $\frac{9}{25}+\sin^2 a=1$ d'où $\sin^2 a=\frac{16}{25}$ et par suite, $\sin a=\frac{4}{5}$ ou $\sin a=-\frac{4}{5}$.

De plus, $a\in\left[-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin a\leqslant 0$.

On en déduit que $\sin a=-\frac{4}{5}$.

Remarque :

La calculatrice permet d'obtenir une valeur approchée de a.
On ne peut cependant pas utiliser cette valeur approchée pour répondre aux questions.

Beaucoup d'élèves ont oublié de mentionner le signe.