TS1

Contrôle du samedi 4 mars 2017 (2 heures)

• Il est demandé de ne rien écrire sur l'énoncé.

• On apporteră un soin particulier à la rédaction.

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

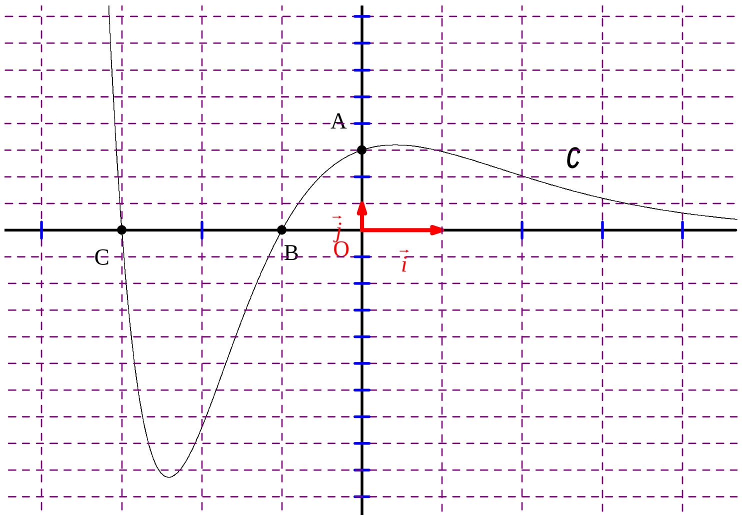
1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln\frac{1}{x} - \ln x \geqslant a \quad (1)$ où a est un réel fixé.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} > 0 \quad (2)$.

II. (6 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$ où $P(x)$ est un polynôme du second degré.

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est donnée sur le graphique ci-dessous. On admet que $\mathcal{C}$ passe par les points $\mathrm{A}(0\,;3)$, $\mathrm{B}(-1\,;0)$ et $\mathrm{C}(-3\,;0)$.



Ne rien écrire sur le graphique.

1°) Déterminer $P(x)$. Il est demandé de détailler la démarche. En revanche, on pourra se contenter d'écrire uniquement les étapes les plus importantes du calcul.

2°) On suppose que $P(x)$ est le polynôme déterminé à la question précédente.
Démontrer que la droite (AC) est la tangente à $\mathcal{C}$ en A.
On attend une rédaction la plus concise et la plus claire possible.

3°) Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
Vérifier sur le graphique la cohérence des résultats obtenus.

III. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point)

À tout réel $a > 0$, on associe la fonction $f_a : x \mapsto \mathrm{e}^x - ax$ définie sur $\mathbb{R}$.

Aucune justification n'est demandée pour les réponses des questions 1°), 2°) et 4°).

1°) Recopier et compléter la phrase :
« Le minimum global de f_a sur $\mathbb{R}$ est atteint en ………… ; il est égal à ……………………... . »

2°) Pour quelles valeurs de a le minimum de f_a est-il strictement négatif ?

3°) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_a(x)$ en justifiant soigneusement.
Seule une réponse correctement justifiée sera prise en compte.

4°) Déterminer suivant les valeurs de a le nombre de solutions de l'équation $f_a(x) = 0 \quad (\mathrm{E}_a)$.

IV. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) a) 1 points ; b) 1 point)

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $\mathrm{A}(1\,;2\,;3)$, $\mathrm{B}(3\,;0\,;1)$, $\mathrm{C}(-1\,;0\,;1)$, $\mathrm{D}(2\,;1\,;-1)$, $\mathrm{E}(-1\,;-2\,;3)$ et $\mathrm{F}(-2\,;-3\,;4)$.

Dans cet exercice, on attend une rédaction concise mais précise.

1°) On note I le milieu du segment $[\mathrm{BC}]$.
Démontrer que le point I appartient à la droite (EF).

2°) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ ne sont pas coplanaires.

3°) Soit G le point tel que $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = 3\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{CA}}$.

a) Quelles sont les coordonnées du point G dans le repère $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$? Répondre sans justifier.

b) Que peut-on dire des droites (BG) et (CD) ? Justifier en trois lignes.

Prénom et nom : ………………………………………..…………… **Note : …….. / 20**

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

II. (6 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

1°) ……………………………………………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………………………………………

3°) ……………………………………………………………………………………………………

III. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point)

1°) ……………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………..

2°) ……………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………..

3°) ……………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………………..

4°) ……………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………………..

IV. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) a) 1 points ; b) 1 point)

1°) ……………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………………..

2°) ……………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………………..

3°) a) ……………………………………… (une seule réponse sans justifier)

b) ……………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………………..

Corrigé du contrôle du 4-3-2017

I.

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln\dfrac{1}{x}-\ln x\geqslant a$ (1) où a est un réel fixé.

• On résout (1) dans l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.

$(1)\Leftrightarrow -\ln x-\ln x\geqslant a$

$\Leftrightarrow -2\ln x\geqslant a$

$\Leftrightarrow \ln x\leqslant -\dfrac{a}{2}$

$\Leftrightarrow x\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1=\left]0\,;\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}\right]$

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2-\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}>0$ (2).

On résout (2) dans $\mathbb{R}^*$.

$(2)\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}<2$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{x}<\ln 2$

$\Leftrightarrow \ln 2+\dfrac{1}{x}>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x\ln 2+1}{x}>0$

$\Leftrightarrow x<-\dfrac{1}{\ln 2}$ ou $x>0$ (trouvé grâce à un tableau de signes)

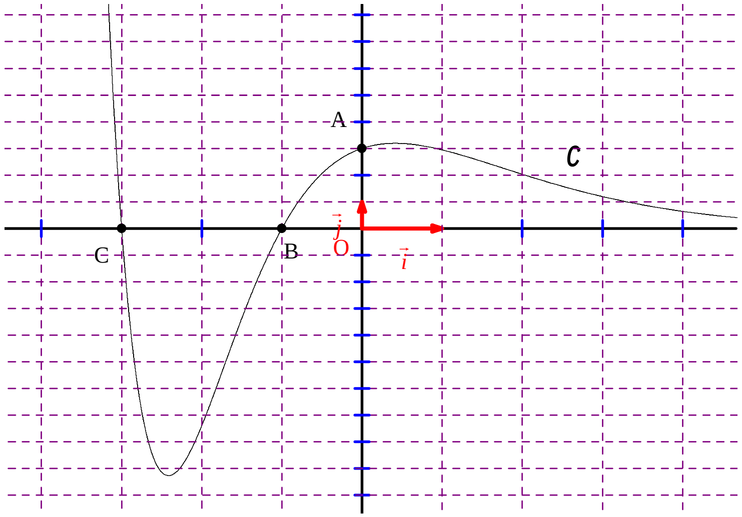
Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$S_2=\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{\ln 2}\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[$

II.

On considère la fonction $f:x\mapsto P(x)\mathrm{e}^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$ où $P(x)$ est un polynôme du second degré.

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$ est donnée sur le graphique ci-dessous. On admet que $\mathcal{C}$ passe par les points $\mathrm{A}(0\,;3)$, $\mathrm{B}(-1\,;0)$ et $\mathrm{C}(-3\,;0)$.



Ne rien écrire sur le graphique.

1°) Déterminer $P(x)$. Il est demandé de détailler la démarche. En revanche, on pourra se contenter d'écrire uniquement les étapes les plus importantes du calcul.
Déterminer a, b, c. Il est demandé de détailler la démarche. En revanche, on pourra se contenter d'écrire uniquement les étapes les plus importantes du calcul.

Il y a plusieurs méthodes. La 3$^{\mathrm{e}}$ méthode est la meilleure.

1$^{\text{ère}}$ méthode :

On sait que $P(x)$ est un polynôme du second degré donc il existe trois réels a, b, c avec $a\neq 0$ tels que $\forall x\in\mathbb{R}\quad P(x)=ax^2+bx+c$.

$\mathrm{A}\in\mathcal{C}$ donc $\mathrm{e}^{-0}\left(a\times 0^2+b\times 0+c\right)=3$ d'où $c=3$.

$\mathrm{B}\in\mathcal{C}$ donc $\mathrm{e}^{-(-1)}\left(a\times(-1)^2+b\times(-1)+3\right)=0$ (1) [équation produit nul].

$(1)\Leftrightarrow a-b+3=0$ $(1')$ (car $\mathrm{e}\neq 0$)

$\mathrm{C}\in\mathcal{C}$ donc $\mathrm{e}^{-(-3)}\left(a\times(-3)^2+b\times(-3)+3\right)=0$ (2).

$(2) \Leftrightarrow 9a-3b+3=0$ (car $e^3 \neq 0$)

$\Leftrightarrow 3a-b+1=0$ $(2')$ (en simplifiant les deux membres de l'égalité par 3)

$$\begin{cases}(1')\\(2')\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a-b=-3\\3a-b=-1\end{cases}\left|\begin{array}{l}\times(-1)\\\times 1\end{array}\right|\begin{array}{l}\times(-3)\\\times 1\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2a=2\\2b=8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=4\end{cases}$$

Conclusion : $a=1$; $b=4$; $c=3$

La fonction f est donc définie par $f(x)=e^{-x}(x^2+4x+3)$.

2^e méthode :

$A \in \mathcal{C}$ donc $e^{-0}P(0)=3$ soit $P(0)=3$.
$B \in \mathcal{C}$ donc $e^{1}P(-1)=0$ soit $eP(-1)=0$.
$C \in \mathcal{C}$ donc $e^{3}P(-3)=0$.

En observant que e et e^3 sont non nuls, on obtient : $P(0)=3$, $P(-1)=0$ et $P(-3)=0$.

On pose ensuite $P(x)=ax^2+bx+c$ où a, b, c sont trois réels tels que $a \neq 0$.
On est alors conduit au même système qu'avec la méthode précédente.

3^e méthode :

$B \in \mathcal{C}$ donc $e^{1}P(-1)=0$ soit $eP(-1)=0$.
$C \in \mathcal{C}$ donc $e^{3}P(-3)=0$.

En observant que e et e^3 sont non nuls, on obtient : $P(0)=3$, $P(-1)=0$ (1) et $P(-3)=0$ (2).

On pose ensuite $P(x)=ax^2+bx+c$ où a, b, c sont trois réels tels que $a \neq 0$.

Les égalités (1) et (2) montrent que – 1 et – 3 sont racines de $P(x)$.

On en déduit que $P(x)=a(x+1)(x+3)$ (formule de factorisation d'un polynôme du second degré).

$A \in \mathcal{C}$ donc $e^{-0}P(0)=3$ soit $P(0)=3$.

Avec l'expression factorisée, on peut écrire $P(0)=a(0+1)(0+3)=3a$.

On en déduit que $3a=3$ d'où $a=1$.
Par conséquent, $P(x)=x^2+4x+3$.

L'expression de f est donc donnée par $f(x)=e^{-x}(x^2+4x+3)$.

2°) On suppose que $P(x)$ est le polynôme déterminé à la question précédente.
Démontrer que la droite (AC) est la tangente à $\mathcal{C}$ en A.
On attend une rédaction la plus concise et la plus claire possible.

On dérive d'abord la fonction f.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)=(-e^{-x})(x^2+4x+3)+e^{-x}(2x+4)$$

$$=e^{-x}(-x^2-2x+1)$$

Le coefficient directeur de la tangente en A à $\mathcal{C}$ est égal à $f'(0)=1$.

Par ailleurs, le coefficient directeur de la droite (AC) est égal à $\dfrac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=1$.

Il est donc égal au coefficient directeur de la tangente en A à $\mathcal{C}$.
On en déduit que (AC) est la tangente à $\mathcal{C}$ en A.

3°) Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
Vérifier sur le graphique la cohérence des résultats obtenus.

Les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f'(x)=0$ (1).

$(1) \Leftrightarrow (-x^2-2x+1)e^{-x}=0$

$\Leftrightarrow -x^2-2x+1=0$ (car $e^x \neq 0$ pour tout réel x)

$\Leftrightarrow x=-1-\sqrt{2}$ ou $x=-1+\sqrt{2}$ (résolution grâce au discriminant réduit $\Delta'=2$)

On en conclut que les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses sont $-1-\sqrt{2}$ et $-1+\sqrt{2}$.

On vérifie que ces résultats sont cohérents avec le graphique.
En effet, $-1-\sqrt{2}=-2,414...$ et $-1+\sqrt{2}=0,414...$.
Sur la courbe, on observe que f admet deux extremums locaux atteints en des réels qui sont environ égaux à 0,4 et – 2,4. La courbe $\mathcal{C}$ présente une tangente horizontale en ces points.

III.

À tout réel $a>0$, on associe la fonction $f_a : x \mapsto \mathrm{e}^x - ax$ définie sur $\mathbb{R}$.

Aucune justification n'est demandée pour les réponses des questions 1°), 2°) et 4°).

1°) Recopier et compléter la phrase :
« Le minimum global de f_a sur $\mathbb{R}$ est atteint en …………. ; il est égal à ……………………... . »

Le minimum global de f_a sur $\mathbb{R}$ est atteint en $\ln a$; il est égal à $a(1-\ln a)$.

Pour cela, on effectue une étude de la fonction.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_a{}'(x) = \mathrm{e}^x - a$

$f_a{}'(x)$ s'annule pour $x = \ln a$ (rappel : $a>0$ par hypothèse).

x	$-\infty$		$\ln a$		$+\infty$
Signe de $f_a{}'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f_a		$\searrow$	$a - a\ln a$	$\nearrow$	

2°) Pour quelles valeurs de a le minimum de f_a est-il strictement négatif ?

D'après la question précédente, le minimum global de f_a sur $\mathbb{R}$ est égal à $a(1-\ln a)$.
On doit donc résoudre l'inéquation $a(1-\ln a)<0 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow 1-\ln a<0 \quad$ (car $a>0$ par hypothèse)

$\Leftrightarrow 1<\ln a$

$\Leftrightarrow \ln a>1$

$\Leftrightarrow a>\mathrm{e}$

Le minimum global de f_a sur $\mathbb{R}$ est strictement négatif pour $a>\mathrm{e}$.

3°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x)$ en justifiant soigneusement.
Seule une réponse correctement justifiée sera prise en compte.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (-ax) = +\infty\end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une somme } \lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = +\infty.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (-ax) = -\infty\end{array}\right\} \text{ donc, en } +\infty\text{, on rencontre une forme indéterminée du type } "\infty-\infty".$$

Pour lever l'indétermination, on effectue une réécriture de $f_a(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f_a(x) = x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - a\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - a\right) = +\infty\end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un produit } \lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty.$$

On utilise $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ qui est une limite de référence.

4°) Déterminer suivant les valeurs de a le nombre de solutions de l'équation $f_a(x)=0 \quad (\mathrm{E}_a)$.

1[er] cas : $a>\mathrm{e}$

On sait que le minimum global de f_a sur $\mathbb{R}$ est strictement négatif.
On se réfère au tableau de variations de f_a qui a été déterminé à la question 1°) en le complétant avec les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

x	$-\infty$		$\ln a$		$+\infty$
Variations de f_a	$+\infty$	$\searrow$	$f_a(\ln a)$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f_a est continue sur $\mathbb{R}$.
$f_a(\ln a)<0$

On peut applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans sa version généralisée sur chacun des intervalles $]-\infty\,;\ln a]$ et $[\ln a\,;+\infty[$.

L'équation (E_a) admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

2[e] cas : $a=\mathrm{e}$

On sait que le minimum global de f_{e} sur $\mathbb{R}$ est égal à 0.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de f_a	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

L'équation $(\mathrm{E}_{\mathrm{e}})$ admet 1 pour unique solution dans $\mathbb{R}$.

3^e cas : $a < e$

On sait que le minimum global de f_a sur $\mathbb{R}$ est strictement positif.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_a(x) > 0$

L'équation (E_a) n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

IV.

Dans l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1 ; 2 ; 3)$, $B(3 ; 0 ; 1)$, $C(-1 ; 0 ; 1)$, $D(2 ; 1 ; -1)$, $E(-1 ; -2 ; 3)$ et $F(-2 ; -3 ; 4)$.

Dans cet exercice, on attend une rédaction concise mais précise.

1°) On note I le milieu du segment $[BC]$.
Démontrer que le point I appartient à la droite (EF).

I a pour coordonnées $(1 ; 0 ; 1)$ (on applique la formule des coordonnées d'un milieu).

$\overrightarrow{EF}\,(-1 ; -1 ; 1) \qquad \overrightarrow{EI}\,(2 ; 2 ; -2)$

On constate que $\overrightarrow{EI} = -2\overrightarrow{EF}$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EI}$ sont colinéaires. On en déduit que les points E, F, I sont alignés.
Par suite, $I \in (EF)$.

2°) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires.

$\overrightarrow{AB}\,(2 ; -2 ; -2)$, $\overrightarrow{AC}\,(-2 ; -2 ; -2)$, $\overrightarrow{AD}\,(1 ; -1 ; -4)$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel α tel que $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$.

On cherche s'il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda - 2\mu \\ -1 = -2\lambda - 2\mu \\ -4 = -2\lambda - 2\mu \end{cases}$$

Par comparaison des deux dernières équations, on voit immédiatement que ce système n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^2$.

On peut donc affirmer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires.

3°) Soit G le point tel que $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA}$.

a) Quelles sont les coordonnées du point G dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$? Répondre sans justifier.

L'égalité $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA}$ donne : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD}$.

On en déduit que le point G a pour coordonnées $(1 ; -3 ; 3)$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

b) Que peut-on dire des droites (BG) et (CD) ? Justifier en trois lignes.

1ère méthode : la meilleur car sans calcul de coordonnées.

$\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA}$ donc $\overrightarrow{AG} = 3(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AB}$ d'où $\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CD}$ ce qui donne $\overrightarrow{BG} = 3\overrightarrow{CD}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
On en déduit que $(BG)//(CD)$.

2e méthode : la moins bonne car on effectue des calculs de coordonnées.

En effectuant des calculs simples, on obtient que G a pour coordonnées $(12 ; 3 ; -5)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$\overrightarrow{BG}\,(9 ; 3 ; -6) \qquad \overrightarrow{CD}\,(3 ; 1 ; -2)$

On constate que $\overrightarrow{BG} = 3\overrightarrow{CD}$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
On en déduit que $(BG)//(CD)$.