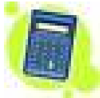
1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du vendredi 24 février 2017 (50 minutes)



Prénom et nom : ……………………..………………………………….

Note : ….. / 20

I. (4 points)

Les réels $a=\sqrt{2}-1$, $b=\sqrt{2}-2$, $c=\sqrt{8}-2$ dans cet ordre sont-ils en progression géométrique ?
On attend une réponse argumentée.
On commencera sèchement les calculs que l'on présentera en détail de manière soignée.
On conclura par une phrase clairement rédigée.

……………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………..……………………………………………………

II. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0=5$ et de raison $-\frac{2}{3}$.

1°) Exprimer u_n en fonction de *n*. La lettre *n* doit être la seule lettre figurant dans le membre de droite.

$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=$ ....

2°) À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel *n* tel que $|u_n|<10^{-4}$.

………………….. (un seul résultat, sans égalité)

3°) On pose $P=u_0\times u_1\times\ldots\times u_{2017}$. Quel est le signe de *P* ? Répondre sans justifier par une seule phrase.

……………………………………………………………………..……………………………………………………

III. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point)

Dans tout l'exercice, on s'intéresse à un médicament M administré contre la grippe.

1°) Lors d'une épidémie grippale, sur une période de 6 jours, un pharmacien voit la vente de boîtes du médicament M doubler chaque jour. Il en vend 20 le premier jour.
Quel est le nombre total de médicaments vendus au cours de ces 6 jours ?

………………… (un seul résultat, sans égalité)

2°) Une fois le pic de l'épidémie passé, le laboratoire qui le produit souhaite limiter son stock du médicament M décide de diminuer sa production. Alors qu'elle était initialement de 20 000 boîtes, cette production sera diminuée de 5 % chaque semaine.

a) Quel est le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 5 % ?

…………… (une seule réponse, sous forme décimale et sans égalité)

b) Quelle sera la production après 13 semaines ? On donnera la valeur arrondie à l'unité.
Présenter le calcul effectué sur les lignes au verso. On veillera à ne pas introduire de notation.

……………………………. (un seul résultat, sans égalité)

………

………

………

………

IV. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points)

Pour fabriquer un nouveau produit, une entreprise décide d'acheter une machine qu'elle paiera en quatre règlements mensuels dégressifs.
Les conditions de paiement sont les suivantes : les quatre règlements mensuels sont en progression géométrique de raison $q = 0,6$. Le coût total est de 6800 euros.
Le but de l'exercice est de calculer le montant des quatre règlements mensuels.

1°) On note *x* le montant en euros du règlement du premier mois.
Exprimer en fonction de *x* la somme totale *S*, en euros, des quatre remboursements.
Présenter le calcul effectué sur les lignes ci-dessous.

………………………………. (une seule égalité)

………

………

………

………

………

………

2°) Calculer x sur les lignes ci-contre puis compléter le tableau ci-dessous.

Règlement du 1er mois	Règlement du 2e mois	Règlement du 3e mois	Règlement du 4e mois

………

………

………

………

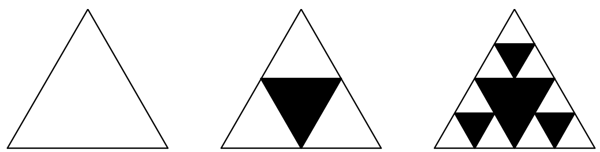
………

………

………

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On partage un triangle équilatéral en quatre triangles équilatéraux obtenus en traçant les segments joignant les milieux des côtés et on noircit le triangle central. Chaque triangle non noirci est alors divisé en quatre triangles équilatéraux selon le même procédé et on noircit le triangle central comme précédemment.



Triangle initial   Étape 1   Étape 2

On note u_n le nombre de triangles noircis rajoutés à la *n*-ième étape où *n* est un entier supérieur ou égal à 1.
La suite (u_n) ainsi définie est une suite géométrique de raison 3.

1°) Exprimer u_n en fonction de *n*.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ……………………………………. (une seule égalité)

2°) Calculer le nombre total de triangles noircis après la dixième étape.

…………………………………… (un seul résultat sans égalité)

Corrigé du contrôle du 24-2-2017

I.

Les réels $a=\sqrt{2}-1$, $b=\sqrt{2}-2$, $c=\sqrt{8}-2$ dans cet ordre sont-ils en progression géométrique ?
On attend une réponse argumentée.
On commencera sèchement les calculs que l'on présentera en détail de manière soignée.
On conclura par une phrase clairement rédigée.

$$\begin{aligned}\frac{b}{a}&=\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-1}\\&=\frac{\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}\\&=-\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{c}{b}&=\frac{\sqrt{8}-2}{\sqrt{2}-2}\\&=\frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-2}\\&=\frac{\left(2\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}+2\right)}{\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}+2\right)}\\&=-\sqrt{2}\end{aligned}$$

On a : $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=-\sqrt{2}$.
On en conclut que *a*, *b*, *c* dans cet ordre sont en progression géométrique.

II.

Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0=5$ et de raison $-\frac{2}{3}$.

1°) Exprimer u_n en fonction de *n*. La lettre *n* doit être la seule lettre figurant dans le membre de droite.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=5\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

2°) À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel *n* tel que $|\,u_n\,|<10^{-4}$.

27 (un seul résultat, sans égalité)

On rentre dans la calculatrice la fonction $f:x\mapsto 5\times\left(-\frac{2}{3}\right)^x$ (ou la fonction $g:x\mapsto 5\times\left(\frac{2}{3}\right)^x$).
On affiche le tableau de valeurs de *f* (réglage en prenant 0 pour valeur minimale de *x* et un pas de 1).
On regarde les résultats sans tenir compte du signe.

3°) On pose $P=u_0\times u_1\times...\times u_{2017}$. Quel est le signe de *P* ? Répondre sans justifier par une seule phrase.

Les termes de la suite (u_n) sont alternativement positifs ou négatifs suivant les valeurs de *n*.
u_n est positif si *n* est pair ; u_n est négatif si *n* est impair.

Pour déterminer le signe de *P*, on compte le nombre de facteurs négatifs dans le produit pour savoir si c'est un nombre pair ou impair.
Les facteurs négatifs sont u_1, u_2, u_3, …, u_{2017}.
Il y a 2018 facteurs au total dans le produit : 1009 termes d'indices pairs et 1009 termes d'indices impairs. Donc le produit est négatif.

Piège : Quelques élèves ont écrit que *P* est nul. Ils se sont appuyés sur le fait que la calculatrice affiche 0 pour u_{2017}.
Ce résultat est faux. En effet, $u_{2017}=5\times\left(-\frac{2}{3}\right)^{2017}$ donc u_{2017} n'est pas nul. Dans ce cas, la calculatrice aurait dû donner un résultat approché sous forme de puissance de 10.

III.

Dans tout l'exercice, on s'intéresse à un médicament M administré contre la grippe.

1°) Lors d'une épidémie grippale, sur une période de 6 jours, un pharmacien voit la vente de boîtes du médicament M doubler chaque jour. Il en vend 20 le premier jour.
Quel est le nombre total de médicaments vendus au cours de ces 6 jours ?

1260 (un seul résultat, sans égalité)

On effectue le calcul : $20+40+80+160+320+640=1260$.

2°) Une fois le pic de l'épidémie passé, le laboratoire qui le produit souhaite limiter son stock du médicament M décide de diminuer sa production. Alors qu'elle était initialement de 20 000 boîtes, cette production sera diminuée de 5 % chaque semaine.

a) Quel est le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 5 % ? Répondre sous forme décimale.

0,95 (une seule réponse, sous forme décimale et sans égalité)

b) Quelle sera la production après 13 semaines ? On donnera la valeur arrondie à l'unité.
Présenter le calcul effectué sur les lignes au verso. On veillera à ne pas introduire de notation.

10267 (un seul résultat, sans égalité)

On peut modéliser la situation par une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme 20000.
On calcule $20000\times0{,}95^{13}=10266{,}84...$ (résultat obtenu à l'aide de la calculatrice).
La valeur arrondie à l'unité du résultat est 10267.

IV.

Pour fabriquer un nouveau produit, une entreprise décide d'acheter une machine qu'elle paiera en quatre règlements mensuels dégressifs.
Les conditions de paiement sont les suivantes : les quatre règlements mensuels sont en progression géométrique de raison $q = 0,6$. Le coût total est de 6800 euros.
Le but de l'exercice est de calculer le montant des quatre règlements mensuels.

1°) On note x le montant en euros du règlement du premier mois.
Exprimer en fonction de x la somme totale S, en euros, des quatre remboursements.
Présenter le calcul effectué sur les lignes ci-dessous.

$$S = 2,176x \text{ (une seule égalité)}$$

$S = x + 0,6x + 0,6^2 \times x + 0,6^3 \times x$
$= x + 0,6x + 0,36x + 0,216x$
$= 2,176x$

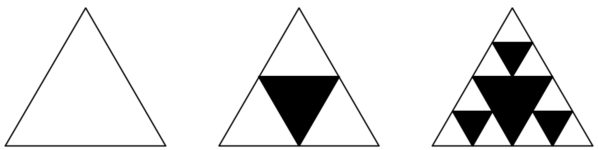
2°) Calculer x sur les lignes ci-contre puis compléter le tableau ci-dessous.

Règlement du 1$^{\text{er}}$ mois	Règlement du 2$^{\text{e}}$ mois	Règlement du 3$^{\text{e}}$ mois	Règlement du 4$^{\text{e}}$ mois
3125	1875	1125	675

On a $S = 6800$.
Par conséquent, x vérifie l'égalité $2,176x = 6800$ d'où $x = \dfrac{6800}{2,176}$ soit $x = 3125$.

V.

On partage un triangle équilatéral en quatre triangles équilatéraux obtenus en traçant les segments joignant les milieux des côtés et on noircit le triangle central. Chaque triangle non noirci est alors divisé en quatre triangles équilatéraux selon le même procédé et on noircit le triangle central comme précédemment.



Triangle initial   Étape 1   Étape 2

On note u_n le nombre de triangles noircis $\boxed{\text{rajoutés}}$ à la n-ième étape où n est un entier supérieur ou égal à 1.
La suite (u_n) ainsi définie est une suite géométrique de raison 3.

1°) Exprimer u_n en fonction de n.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 3^{n-1} \text{ (une seule égalité)}$$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_1 = 1$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 1 \times 3^{n-1}$ que l'on n'écrit pas. On donne la réponse sous la forme $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 3^{n-1} \quad u_1 = 1$.
En effet, par définition, u_n est égal au nombre de triangles noircis à l'étape n donc $u_1 = 1$ puisqu'il y a un triangle noirci à l'étape 1.

La formule $u_n = 3^{n-1}$ fonctionne non seulement pour $n = 1$ (3^{1-1}) et pour $n = 2$ ($3^{2-1} = 3$). Il y a bien 3 triangles ajoutés à la deuxième étape.

2°) Calculer le nombre $\boxed{\text{total}}$ de triangles noircis après la dixième étape.

29524 (un seul résultat sans égalité)

On doit calculer la somme de tous les termes de la suite de u_1 à u_{10}.

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^9 = 29524$$