TS1

Contrôle du vendredi 24 février 2017 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..……………

Note : ……../ 20

On prendra soin de ne rien écrire sur l'énoncé en dehors de ce qui est demandé.

I. (6 points : 1°) 2 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 2 points)

À tout entier naturel $n \geqslant 1$, on associe la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^n}$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et l'on note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1°) Calculer $f_n'(x)$.
On donnera le résultat sous la forme d'un seul quotient avec numérateur simplifié.
On observera que l'on peut écrire $f_n(x) = \ln x \times \dfrac{1}{x^n}$.

……

……

……

……

……

2°) Déterminer les réels x en lesquels f_n' s'annule pour n fixé.

…………………………………… (une seule réponse, sans égalité, sans justifier)

3°) Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par un point fixe A dont on donnera les coordonnées.

……

……

……

……

4°) Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ ont la même tangente en A.

……

……

……

……

……

II. (1 point)

Donner sans justifier l'expression d'une primitive F de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

$\mathrm{F}(x) =$ ……………………….

III. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 1 + \mathrm{e}^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer par la méthode des inégalités successives le meilleur encadrement possible de $f(x)$ pour $x \in [\ln 3\,;2\ln 2]$.

……

……

……

……

……

……

……

IV. (6 points : 1°) 3 points ; 2°) 3 points)

1°) On considère les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$\ln(x+1)+\ln(x-1)=\ln 15 \ (1)$; $\ln(1-x)+\ln(3+x)=\ln 3 \ (2)$; $\ln(e^x+1)=1 \ (3)$.

Compléter le tableau suivant en écrivant les différents ensembles sans égalités :

	Équation (1)	Équation (2)	Équation (3)
Ensemble de résolution			
Ensemble des solutions			

2°) On considère les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$\ln(x^2-3)<0 \ (4)$; $1+\ln(2x)<\ln 5 \ (5)$; $\ln(1-x^2)<1 \ (6)$.

Compléter le tableau suivant en écrivant les différents ensembles sans égalités :

	Inéquation (4)	Inéquation (5)	Inéquation (6)
Ensemble de résolution			
Ensemble des solutions			

V. (1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2+x+1)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Calculer $f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) =$ .... (une seule expression en fonction de *x*)

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

1°) Compléter sans justifier les égalités de limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0^+}(x\ln x)=$............ ; $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=$............ .

2°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x - 2}{x}$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Déterminer la limite de *f* en $+\infty$ en détaillant toute la démarche.

....

....

....

....

....

....

....

....

3°) On considère la fonction $g : x \mapsto \ln x + \dfrac{1}{x}$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Déterminer la limite de *g* en en 0^+ en détaillant toute la démarche.

....

....

....

....

....

....

Corrigé du contrôle du 24-2-2017

I.

À tout entier naturel $n \geqslant 1$, on associe la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^n}$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et l'on note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1°) Calculer $f_n'(x)$.
On donnera le résultat sous la forme d'un seul quotient avec numérateur simplifié.
On observera que l'on peut écrire $f_n(x) = \ln x \times \dfrac{1}{x^n}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_n'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x^n} + \ln x \times \left(-\frac{n}{x^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{1 - n\ln x}{x^{n+1}}$$

2°) Déterminer les réels x en lesquels f_n' s'annule pour n fixé.

$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$ (une seule réponse, sans égalité, sans justifier)

3°) Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par un point fixe A dont on donnera les coordonnées.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n(1) = \frac{\ln 1}{1^n} = 0$$

On en déduit que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par le point $\mathrm{A}(1\,;0)$.

Pour trouver, on peut tracer des courbes $\mathcal{C}_n$ pour différentes valeurs de n sur l'écran de la calculatrice.

4°) Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ ont la même tangente en A.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n'(1) = \frac{1 - n\ln 1}{1^{n+1}} = 1$$

La tangente en A à $\mathcal{C}_n$ a pour coefficient directeur 1.

Le point A est un point fixe (qui ne dépend pas de n) et le coefficient directeur de la tangente en A a un coefficient directeur indépendant de n.

On en déduit que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ ont la même tangente en A.

II.

Donner sans justifier l'expression d'une primitive F de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

$$\mathrm{F}(x) = 2\ln x + \frac{1}{x}$$

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto 1 + \mathrm{e}^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer par la méthode des inégalités successives le meilleur encadrement possible de $f(x)$ pour $x \in [\ln 3\,; 2\ln 2]$.

On part de l'inégalité $\ln 3 \leqslant x \leqslant 2\ln 2$.

On peut écrire successivement les encadrements suivants :

$-\ln 3 \geqslant -x \geqslant -2\ln 2$

$\mathrm{e}^{-\ln 3} \geqslant \mathrm{e}^{-x} \geqslant \mathrm{e}^{-2\ln 2}$ (car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$).

$\dfrac{1}{3} \geqslant \mathrm{e}^{-x} \geqslant \dfrac{1}{4}$ (car $\mathrm{e}^{-\ln 3} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 3}} = \dfrac{1}{3}$ et $\mathrm{e}^{-2\ln 2} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2\ln 2}} = \dfrac{1}{\left(\mathrm{e}^{\ln 2}\right)^2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$)

$\dfrac{4}{3} \geqslant 1 + \mathrm{e}^{-x} \geqslant \dfrac{5}{4}$

$\dfrac{5}{4} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{4}{3}$ (encadrement final)

Remarque :

Pour calculer $\mathrm{e}^{-\ln 3}$, on peut aussi écrire : $\mathrm{e}^{-\ln 3} = \mathrm{e}^{\ln\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}$.

- Quand on demande un encadrement de $f(x)$, on attend un résultat sous la forme $\ldots \leqslant f(x) \leqslant \ldots$ (éventuellement avec des inégalités strictes au lieu d'inégalités larges).

- La démarche par inégalités successives sous entend une démarche entièrement déductive.
Ainsi l'utilisation du symbole d'équivalence est-elle bannie dans la rédaction.

- On pourrait gagner du temps en étudiant le sens de variation de la fonction *f*. Cette démarche n'a pas été retenue car nous n'avons par encore appris comment dériver la fonction $x \mapsto 1 + \mathrm{e}^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

IV.

1°) On considère les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$\ln(x+1)+\ln(x-1)=\ln 15$ (1) ; $\ln(1-x)+\ln(3+x)=\ln 3$ (2) ; $\ln(e^x+1)=1$ (3).

Compléter le tableau suivant en écrivant les différents ensembles sans égalités :

	Équation (1)	Équation (2)	Équation (3)
Ensemble de résolution	$]1\,;+\infty[$	$]-3\,;1[$	$\mathbb{R}$
Ensemble des solutions	$\{4\}$	$\{-2\,;0\}$	$\{\ln(e-1)\}$

2°) On considère les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$\ln(x^2-3)<0$ (4) ; $1+\ln(2x)<\ln 5$ (5) ; $\ln(1-x^2)<1$ (6).

Compléter le tableau suivant en écrivant les différents ensembles sans égalités :

	Inéquation (3)	Inéquation (5)	Inéquation (6)
Ensemble de résolution	$]-\infty\,;-\sqrt{3}[\,\cup\,]\sqrt{3}\,;+\infty[$	$]0\,;+\infty[$	$]-1\,;1[$
Ensemble des solutions	$]-2\,;-\sqrt{3}[\,\cup\,]\sqrt{3}\,;2[$	$\left]0\,;\dfrac{5}{2e}\right[$	$]-1\,;1[$

• On résout (1) dans $]1\,;+\infty[$.

(1) $\Leftrightarrow \ln[(x+1)(x-1)]=\ln 15$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)=15$

$\Leftrightarrow x^2-1=15$

$\Leftrightarrow x^2=16$

$\Leftrightarrow x=4$ (qui convient) ou $x=-4$ (qui ne convient pas)

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1=\{4\}$

• On résout (2) dans $]-3\,;1[$.

(2) $\Leftrightarrow \ln[(1-x)(3+x)]=\ln 3$

$\Leftrightarrow (1-x)(3+x)=3$

$\Leftrightarrow 3-2x-x^2=3$

$\Leftrightarrow x^2+2x=0$

$\Leftrightarrow x(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ (qui convient) ou $x=-2$ (qui convient)

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$S_2=\{-2\,;0\}$

• On résout (3) dans $\mathbb{R}$.

(3) $\Leftrightarrow \ln(e^x+1)=\ln e$

$\Leftrightarrow e^x+1=e$

$\Leftrightarrow e^x=e-1$

$\Leftrightarrow x=\ln(e-1)$ (car $e-1>0$)

Soit S_3 l'ensemble des solutions de (3).

$S_3=\{\ln(e-1)\}$

• On résout (4) dans $]-\infty\,;-\sqrt{3}[\,\cup\,]\sqrt{3}\,;+\infty[$.

(4) $\Leftrightarrow \ln(x^2-3)<0$

$\Leftrightarrow \ln(x^2-3)<\ln 1$

$\Leftrightarrow x^2-3<1$

$\Leftrightarrow x^2<4$

$\Leftrightarrow -2<x<2$

Soit S_4 l'ensemble des solutions de (4).

$S_4 = \left]-2\,;-\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}\,;2\right[$

• On résout (5) dans $\left]0\,;+\infty\right[$.

$(5) \Leftrightarrow \ln \mathrm{e} + \ln(2x) < \ln 5$

$\Leftrightarrow \ln(2\mathrm{e}x) < \ln 5$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{e}x < 5$

$\Leftrightarrow x < \dfrac{5}{2\mathrm{e}}$

Soit S_5 l'ensemble des solutions de (5).

$S_5 = \left]0\,;\dfrac{5}{2\mathrm{e}}\right[$

• On résout (6) dans $\left]-1\,;1\right[$.

$(6) \Leftrightarrow \ln\left(1-x^2\right) < \ln \mathrm{e}$

$\Leftrightarrow 1-x^2 < \mathrm{e}$

$\Leftrightarrow 1-\mathrm{e} < x^2$ (toujours vrai car $1-\mathrm{e}<0$)

Soit S_6 l'ensemble des solutions de (6).

$S_6 = \left]-1\,;1\right[$

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(x^2+x+1\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Calculer $f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ (une seule expression en fonction de x)

IV.

1°) Compléter sans justifier les égalités de limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0$. ; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x - 2}{x}$ définie sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$ en détaillant toute la démarche.

En $+\infty$, on rencontre une forme indéterminée du type "$\dfrac{\infty}{\infty}$".

On effectue une réécriture.

$\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[\quad f(x) = \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{2}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{(limite de référence)} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{2}{x}\right) = 0 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une somme } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

3°) On considère la fonction $g : x \mapsto \ln x + \dfrac{1}{x}$ définie sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.

Déterminer la limite de g en en 0^+ en détaillant toute la démarche.

En 0^+, on rencontre une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$".

On effectue une réécriture.

$\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[\quad g(x) = \dfrac{x \ln x + 1}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x + 1) = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x + 1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+ \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une somme } \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty.$$