Partie pour les élèves ayant choisi la spécialité mathématiques (1 heure)

Le barème est donné sur 20.

Prénom : …………………………………..… **Nom :** ………………………………….…………

I. (13 points : 1°) a) 2 points ; b) 3 points ; c) 2 points ; 2°) 3 points ; 3°) 3 points)

Pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, on note N_p l'entier naturel dont l'écriture en base 10 ne comporte que le chiffre 1 répété p fois : $N_p = \underbrace{11............1}_{p \text{ répétitions du chiffre } 1}$.

Le but de l'exercice est de démontrer que pour tout entier naturel $p \geqslant 2$, le nombre N_p n'est pas un carré parfait.

1°) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On suppose que l'écriture en base 10 de n^2 se termine par le chiffre 1. On a donc $n^2 \equiv 1$ (mod. 10).

a) Compléter la deuxième ligne du tableau de congruences ci-dessous en écrivant chaque fois le plus petit entier naturel possible.

$n \equiv \ldots$ (mod. 10)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \ldots$ (mod. 10)										

b) En déduire qu'il existe un entier naturel m tel que $n = 10m + 1$ ou $n = 10m - 1$.

………

………

………

………

………

………

………

c) Conclure que $n^2 \equiv 1$ (mod. 20).

………

………

………

………

………

………

2°) Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Quel est le reste de la division euclidienne de N_p par 20 ?

………

………

………

………

………

………

3°) En déduire que, pour tout entier naturel $p \geqslant 2$, N_p n'est pas le carré d'un entier.

………

………

………

………

………

II. (2 points)

Soit a et b deux entiers relatifs quelconques non tous les deux nuls.
Démontrer en utilisant deux fois le lemme d'Euclide que $\text{PGCD}(9a+4b\,;\,2a+b)=\text{PGCD}(a\,;\,b)$.
On pourra utiliser les égalités $9a+4b=(2a+b)\times 4+a \quad (1)$; $2a+b=a\times 2+b \quad (2)$.

III. (5 points)

On considère l'équation $13x=5y \quad (\text{E})$ d'inconnue $(x\,;\,y)\in\mathbb{Z}^2$.

Déterminer les couples solutions de (E).
Conclure en rédigeant une phrase sur le modèle suivant : « Les couples solutions de (E) sont tous les couples de la forme $(\ldots\ldots\ldots\,;\,\ldots\ldots\ldots)$ ………… ».

Corrigé du contrôle du 2-2-2017 (spécialité mathématiques)

I.

Pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, on note N_p l'entier naturel dont l'écriture en base 10 ne comporte que le chiffre 1 répété *p* fois : $N_p = \underbrace{11............1}_{p \text{ répétitions du chiffre } 1}$.

Le but de l'exercice est de démontrer que pour tout entier naturel $p \geqslant 2$, le nombre N_p n'est pas un carré parfait.

> On peut écrire $N_p = \sum_{k=0}^{k=p-1} 10^k$ ce qui donne, grâce à la formule de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique) $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$ mais cette écriture ne sert à rien pour résoudre la question.

1°) Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On suppose que l'écriture en base 10 de n^2 se termine par le chiffre 1. On a donc $n^2 \equiv 1$ (mod. 10).

a) Compléter la deuxième ligne du tableau de congruences ci-dessous en écrivant chaque fois le plus petit entier naturel possible.

$n \equiv \ldots$ (mod. 10)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \ldots$ (mod. 10)										

	$n \equiv \ldots$ (mod. 10)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Si	$n \equiv \ldots$ (mod. 10)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Alors	$n^2 \equiv \ldots$ (mod. 10)	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

b) En déduire qu'il existe un entier naturel *m* tel que $n = 10m + 1$ ou $n = 10m - 1$.

D'après le tableau de la question précédente, si $n^2 \equiv 1$ (mod. 10), alors $n \equiv 1$ (mod. 10) ou $n \equiv 9$ (mod. 10).

Comme $9 \equiv -1$ (mod. 10), la relation $n \equiv 9$ (mod. 10) est équivalente à $n \equiv -1$ (mod. 10).

Dans le cas où $n \equiv 1$ (mod. 10), il existe un entier naturel *m* tel que $n = 10m + 1$.

Dans le cas où $n \equiv -1$ (mod. 10), il existe un entier naturel *m* tel que $n = 10m - 1$ ($m \geqslant 1$ car $n \geqslant 2$ par hypothèse).

c) Conclure que $n^2 \equiv 1$ (mod. 20).

• Si $n = 10m + 1$, alors $n^2 = 100m^2 + 20m + 1 = 20\left(5m^2 + m\right) + 1$.
Comme $5m^2 + m$ est un entier, on en déduit que $n^2 \equiv 1$ (mod. 20).

• Si $n = 10m - 1$, alors $n^2 = 100m^2 - 20m + 1 = 20\left(5m^2 - m\right) + 1$.
Comme $5m^2 - m$ est un entier, on en déduit que $n^2 \equiv 1$ (mod. 20).

2°) Soit *p* un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Quel est le reste de la division euclidienne de N_p par 20 ?

Cette question est indépendante de la question précédente.

1^er^ cas : $p > 2$
On peut alors écrire :

$$N_p = \underbrace{11............1}_{p-2 \text{ répétitions du chiffre } 1}00 + 11$$ (on pourrait mettre une barre au-dessus pour l'écriture en base 10 $\overline{11...100}$)

$$= N_{p-2} \times 100 + 11$$

On a donc $N_p = 5N_{p-2} \times 20 + 11$. Comme $11 < 20$, cette égalité traduit la division euclidienne de N_p par 20 et montre que le reste de la division euclidienne de N_p par 20 est égal à 11.

2^e^ cas : $p = 2$
On a : $N_2 = 11$.
Le reste de la division euclidienne de N_2 par 20 est 11.

Conclusion : Le reste de la division euclidienne de N_p par 20 est égal à 11.

Autre méthode (en utilisant les congruences) :

On écrit que $100 \equiv 0$ (mod. 20) d'où $N_p \equiv 11$ (mod. 20).

3°) En déduire que, pour tout entier naturel $p \geqslant 2$, N_p n'est pas le carré d'un entier.

Soit *p* un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On sait que l'écriture décimale de N_p se termine par le chiffre 1 et est congru à 11 modulo 20.

Or on a vu que si le carré d'un entier naturel se termine par 1 alors ce carré est congru à 1 modulo 20.

On en déduit que N_p ne peut pas être le carré d'un entier.

II.

Soit *a* et *b* deux entiers relatifs quelconques non tous les deux nuls.
Démontrer en utilisant deux fois le lemme d'Euclide que $\text{PGCD}(9a + 4b\,;\,2a + b) = \text{PGCD}(a\,;\,b)$.
On pourra utiliser les égalités $9a + 4b = (2a + b) \times 4 + a \quad (1)$; $2a + b = a \times 2 + b \quad (2)$.

On observe tout d'abord que les égalités (1) et (2) ne font intervenir que des entiers relatifs.

Grâce au lemme d'Euclide appliqué à l'égalité (1), on peut écrire : $\text{PGCD}(9a+4b\,;2a+b)=\text{PGCD}(2a+b\,;a)$.

Grâce au lemme d'Euclide appliqué à l'égalité (2), on peut écrire : $\text{PGCD}(2a+b\,;a)=\text{PGCD}(a\,;b)$.

On en déduit l'égalité : $\text{PGCD}(9a+4b\,;2a+b)=\text{PGCD}(a\,;b)$.

III.

On considère l'équation $13x=5y$ (E) d'inconnue $(x\,;y)\in\mathbb{Z}^2$.

Déterminer les couples solutions de (E).
Conclure en rédigeant une phrase sur le modèle suivant : « Les couples solutions de (E) sont tous les couples de la forme (...........;...........) ………… ».

1ère partie :

Considérons un couple $(x\,;y)\in\mathbb{Z}^2$ solution de (E). On a donc $13x=5y$.

D'après cette égalité, $13 \mid 5y$.

Or 13 est premier avec 5.

Donc d'après le théorème de Gauss, $13 \mid y$.

Il existe donc un entier relatif k tel que $y=13k$.

On remplace y par $13k$ dans (E).

On obtient : $\cancel{13}x=5\times\cancel{13}k$ d'où $x=5k$.

2e partie :

Considérons un couple de la forme $(5k\,;13k)$ où k est un entier relatif quelconque.
Vérifions qu'il est solution de (E).

On a : $13\times5k=5\times13k$ de manière évidente.

Donc le couple $(5k\,;13k)$ est bien solution de (E).

Conclusion :

Les solutions de (E) sont les couples de la forme $(5k\,;13k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.