TS1

Contrôle du vendredi 27 janvier 2017 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..……………

Note : ……… / 20

I. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=\left]3\,;+\infty\right[$ dont le tableau ci-dessous donne les variations sur I.

x	3		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	-1

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer les asymptotes à $\mathcal{C}$ en justifiant avec soin.

………

………

………

………

………

2°) On pose $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$. Explication brièvement (mais clairement) pourquoi g est définie sur I.

Déterminer $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

………

………

………

………

………

Dresser le tableau de variations de g.

II. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(2x+1)^2}{x^2-x+3}$ définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ en justifiant.

………

………

………

………

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2}{x-x^3}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;0\,;1\}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$ en justifiant.

………

………

………

………

III. (2 points)

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=\left]0\,;+\infty\right[$ telle que pour tout réel $x\in\mathrm{I}$ on ait : $1-\dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqslant f(x) \leqslant 1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ en justifiant.

………

………

………

IV. (6 points)

Dans chaque cas, on donne une fonction f définie sur un intervalle I et on considère une fonction g définie à partir de f. Les questions sont indépendantes les unes des autres.

1°) $\mathrm{I}=\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$; g est définie par $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) $\mathrm{I}=\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2}=0$; g est définie par $g(x)=f(x)-x^2+1$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Indication : On écrira $g(x)=x^2(\text{....................})$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3°) $\mathrm{I}=[0\,;1[$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+} [xf(x)]=0$; g est définie par $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

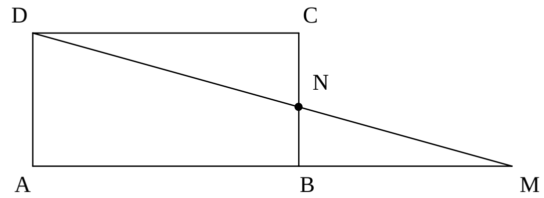
V. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points)

Soit ABCD un rectangle. On pose $\mathrm{AB}=a$ et $\mathrm{AD}=b$ $\left((a\,;b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2\right)$.

Soit M un point quelconque de la demi-droite $[\mathrm{AB})$ n'appartenant pas au segment $[\mathrm{AB}]$. On pose $\mathrm{BM}=x$.

On note N le point d'intersection des droites (BC) et (DM).

Toutes les longueurs sont exprimées dans la même unité.



Ne rien écrire sur la figure.

1°) Démontrer que l'on a : $\mathrm{BN}=\dfrac{bx}{x+a}$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) En déduire la limite de la distance BN lorsque x tend vers $+\infty$. Pouvait-on prévoir le résultat géométriquement ?

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 27-1-2017

I.

On considère une fonction *f* définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left]3\,;+\infty\right[$ dont le tableau ci-dessous donne les variations sur I.

x	3	$+\infty$
Variations de *f*	$\|\|\ -\infty$ $\nearrow$	-1

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer les asymptotes à $\mathcal{C}$ en justifiant avec soin.

On peut éventuellement tracer une esquisse de la courbe « à main levée ».

D'après la tableau de variations, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$.

On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y = -1$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

D'après la tableau de variations, on a $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$.

On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $x = 3$ pour asymptote verticale.

2°) On pose $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. Explication brièvement (mais clairement) pourquoi *g* est définie sur I.

Déterminer $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

D'après le tableau de variations, *f* est majorée par – 1 sur I. Donc $\forall x \in \mathrm{I} \quad f(x) \neq 0$.

On peut même noter que *g* est à valeurs strictement négatives.

$$g(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ existe} \\ f(x) \neq 0 \quad \text{(vrai pour tous les réels } x \in \mathrm{I}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathrm{I}$$

Donc l'ensemble de définition de *g* est I.

Dresser le tableau de variations de *g*.

f est strictement croissante sur I à valeurs strictement négatives donc *g* est strictement décroissante sur I.

D'après les règles d'opérations sur les limites $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \dfrac{1}{-1} = -1$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = 0$.

On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $x = 3$ pour asymptote verticale.

x	3	$+\infty$
Variations de *g*	$\|\|\ 0$ $\searrow$	-1

II.

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(2x+1)^2}{x^2 - x + 3}$ définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en justifiant.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{4x^2 + 4x + 1}{x^2 - x + 3}$$

f est une fonction rationnelle non nulle donc on peut appliquer la règle des monômes de plus haut degré.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2}{x^2} = 4$$

On vérifie le résultat grâce à la calculatrice graphique.

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2}{x - x^3}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\,;0\,;1\}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$ en justifiant.

On ne transforme pas l'expression de $f(x)$ pour déterminer la limite demandée.

On commence directement le calcul de la limite.

(signe obtenu éventuellement par un tableau de signes)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \left(x - x^3\right) = 0^- \end{array}\right\} \text{ donc, par limite d'un quotient, on a : } \lim_{x \to 1^+} g(x) = -\infty.$$

On est obligé d'étudier le signe $x - x^3$. Pour cela, on factorise l'expression $x - x^3 = x\left(1 - x^2\right) = x(1-x)(1+x)$.

On dresse ensuite un tableau de signes.

III.

Soit *f* une fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left]0\,;+\infty\right[$ telle que pour tout réel $x \in \mathrm{I}$ on ait : $1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en justifiant.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \end{array}\right\} \text{ donc d'après le théorème des gendarmes, } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

IV.

Dans chaque cas, on donne une fonction f définie sur un intervalle I et on considère une fonction g définie à partir de f. Les questions sont indépendantes les unes des autres.

1°) $\mathrm{I}=\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$; g est définie par $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'un quotient on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

2°) $\mathrm{I}=\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2}=0$; g est définie par $g(x)=f(x)-x^2+1$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Indication : On écrira $g(x)=x^2(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$.

$\forall x\in\mathbb{R}^* \quad g(x)=x^2\left(\dfrac{f(x)}{x^2}-1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\dfrac{1}{x^2}\right)=-1\end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^2}-1+\dfrac{1}{x^2}\right)=-1$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$.

Donc par limite d'un produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

3°) $\mathrm{I}=]0\,;1[$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+}\left[xf(x)\right]=0$; g est définie par $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$.

On transforme l'expression de g car on rencontre une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ ».

$\forall x\in]0\,;1[\quad g(x)=\dfrac{xf(x)+1}{x}$

Par hypothèse, on a : $\lim\limits_{x\to0^+}\left[xf(x)\right]=0$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}\left(xf(x)+1\right)=1$.

De plus, $\lim\limits_{x\to0^+} x=0^+$.

Donc par limite d'un quotient, $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=+\infty$.

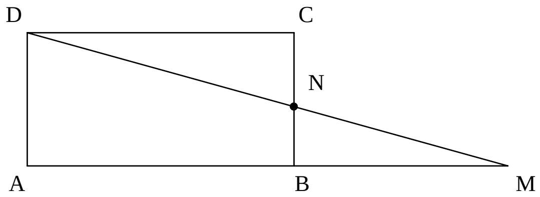
V.

Soit ABCD un rectangle. On pose $\mathrm{AB}=a$ et $\mathrm{AD}=b$ $\left((a\,;b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2\right)$.

Soit M un point quelconque de la demi-droite $[\mathrm{AB})$ n'appartenant pas au segment $[\mathrm{AB}]$. On pose $\mathrm{BM}=x$.

On note N le point d'intersection des droites (BC) et (DM).

Toutes les longueurs sont exprimées dans la même unité.



1°) Démontrer que l'on a : $\mathrm{BN}=\dfrac{bx}{x+a}$.

On sait que ABCD est un rectangle par hypothèse. Par conséquent, $(\mathrm{AD})\,//\,(\mathrm{BC})$.

On se place dans le triangle ADM.

On a : $\mathrm{B}\in[\mathrm{AM}]$, $\mathrm{N}\in[\mathrm{BC}]$ et $(\mathrm{BN})\,//\,(\mathrm{AD})$.

D'après le théorème de Thalès, on peut écrire : $\dfrac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MA}}=\dfrac{\mathrm{BN}}{\mathrm{AD}}$ soit $\dfrac{x}{x+a}=\dfrac{\mathrm{BN}}{b}$ (car $\mathrm{B}\in[\mathrm{AM}]$ donc $\mathrm{MA}=\mathrm{MB}+\mathrm{BA}$).

On en déduit que $\mathrm{BN}=\dfrac{bx}{x+a}$.

2°) En déduire la limite de la distance BN lorsque x tend vers $+\infty$. Pouvait-on prévoir le résultat géométriquement ?

On considère la fonction $f: x\mapsto \dfrac{bx}{x+a}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-a\}$.

f est une fonction rationnelle non nulle (c'est même une fonction homographique) donc on peut appliquer la règle des monômes de plus haut degré.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{bx}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(b)=b$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, BN tend vers b.

Il était possible de prévoir ce résultat géométriquement en observant le déplacement de N sur $[\mathrm{BC}]$ lorsque x augmente.

La position limite du point N est C. La distance BN tend donc vers la distance $\mathrm{BC}=b$.