$1^{ère}$ S1 — Devoir pour le vendredi 10 mars 2017

● Ce devoir est à chercher par groupes de 6 à 8 élèves.

● On veillera à organiser intelligemment le travail parmi les membres de chaque groupe, en veillant à assurer une répartition équitable. Tous ne doivent pas faire la même chose. Certains pourront effectuer des calculs, d'autres pourront les valider…

Dans une urne, on place n jetons (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2) : un noir et tous les autres blancs.
On tire successivement, au hasard et avec remise, deux jetons de l'urne.

1°) Dans cette question, on s'intéresse au jeu N°1 dont la règle est définie de la manière suivante :
- on gagne 16 points si on tire deux fois le jeton noir ;
- on gagne 1 point si on tire deux fois un jeton blanc ;
- on perd 5 points dans les autres cas.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur pour le jeu N°1.

a) Donner la loi de probabilité de X dans un tableau.

b) Exprimer en fonction de n l'espérance mathématique de X.

2°) Dans cette question, on s'intéresse au jeu N°2 dont la règle est définie de la manière suivante :
- on gagne 16 points si on tire deux fois le jeton noir ;
- on perd 5 points si on tire deux fois un jeton blanc ;
- on gagne 1 point dans les autres cas.

On note Y la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur pour le jeu N°2.

a) Donner la loi de probabilité de Y dans un tableau.

b) Exprimer en fonction de n l'espérance mathématique de Y.

3°) a) Pour quelle(s) valeur(s) de n le jeu N°1 est-il équitable ?

b) Pour quelle(s) valeur(s) de n le jeu N°2 est-il équitable ?

c) Pour quelle(s) valeur(s) de n les variables X et Y ont-elles la même espérance mathématique ? Calculer dans ce(s) cas les variances de X et Y.

Corrigé

Dans une urne, on place n jetons (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2) : un noir et tous les autres blancs.
On tire successivement, au hasard et avec remise, deux jetons de l'urne.

1°) Dans cette question, on s'intéresse au jeu N°1 dont la règle est définie de la manière suivante :
- on gagne 16 points si on tire deux fois le jeton noir ;
- on gagne 1 point si on tire deux fois un jeton blanc ;
- on perd 5 points dans les autres cas.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur pour le jeu N°1.

a) Donner la loi de probabilité de X dans un tableau.

x_i	-5	1	16	
$P(\mathrm{X}=x_i)$	$\dfrac{2n-2}{n^2}$	$\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^2$	$\dfrac{1}{n^2}$	$\text{Total}=1$

b) Exprimer en fonction de n l'espérance mathématique de X.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathrm{X}) &= -5\times\frac{2n-2}{n^2}+1\times\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+16\times\frac{1}{n^2}\\ &= \frac{-10n+10+n^2-2n+1+16}{n^2}\\ &= \frac{n^2+10n+27}{n^2}\end{aligned}$$

2°) Dans cette question, on s'intéresse au jeu N°2 dont la règle est définie de la manière suivante :
- on gagne 16 points si on tire deux fois le jeton noir ;
- on perd 5 points si on tire deux fois un jeton blanc ;
- on gagne 1 point dans les autres cas.

On note Y la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur pour le jeu N°2.

a) Donner la loi de probabilité de Y dans un tableau.

b) Exprimer en fonction de n l'espérance mathématique de Y.

y_i	-5	1	16	
$P(\mathrm{Y}=y_i)$	$\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^2$	$\dfrac{2n-2}{n^2}$	$\dfrac{1}{n^2}$	$\text{Total}=1$

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = -5\times\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + 1\times\frac{2n-2}{n^2} + 16\times\frac{1}{n^2}$$
$$= \frac{-5(n^2-2n+1)+2n-2+16}{n^2}$$
$$= \frac{-5n^2+12n+9}{n^2}$$

3°) a) Pour quelle(s) valeur(s) de *n* le jeu N°1 est-il équitable ?

Le jeu N°1 est équitable si et seulement si $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 0 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{n^2+10n+27}{n^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2+10n+27 = 0$$

On considère le polynôme $x^2+10x+27 \ (x\in\mathbb{R})$.
Son discriminant réduit est égal à 9.
Comme il est strictement positif, le polynôme admet deux racines distinctes x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$: $x_1 = 3$ et $x_2 = 9$.

Ces deux valeurs sont des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

On en conclut que le jeu N°1 est équitable si et seulement si $n = 3$ ou $n = 9$.

b) Pour quelle(s) valeur(s) de *n* le jeu N°2 est-il équitable ?

Le jeu N°2 est équitable si et seulement si $\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = 0 \quad (2)$.

$$(2) \Leftrightarrow \frac{-5n^2+12n+9}{n^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -5n^2+12n+9 = 0$$

On considère le polynôme $-5x^2+12x+9 \ (x\in\mathbb{R})$.
Son discriminant réduit est égal à 81.
Comme il est strictement positif, le polynôme admet deux racines distinctes x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$: $x_1 = 3$ et

$x_2 = -\frac{3}{5}$.
Seule la valeur 3 convient.

On en conclut que le jeu N°2 est équitable si et seulement si $n = 3$.

c) Pour quelle(s) valeur(s) de *n* les variables X et Y ont-elles la même espérance mathématique ? Calculer dans ce(s) cas les variances de X et Y.

X et Y ont la même espérance mathématique si et seulement si $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{Y}) \quad (3)$.

$$(3) \Leftrightarrow \frac{n^2-12n+27}{n^2}=\frac{-5n^2+12n+9}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow n^2-12n+27=-5n^2+12n+9$$

$$\Leftrightarrow 6n^2-24n+18=0$$

$$\Leftrightarrow n^2-4n+3=0$$

On considère le polynôme x^2-4x+3 $\left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Ses racines dans $\mathbb{R}$ sont 1 racine évidente) et 3 (obtenue par produit).

Seule la deuxième valeur convient car c'est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On calcule l'espérance de X et Y pour $n=3$.

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{X}\right)=\frac{3^2-12\times 3+27}{3^2}=0 \text{ et } \mathrm{E}\left(\mathrm{Y}\right)=0$$

On calcule ensuite la variance de X et de Y.

Pour $n=3$, la loi de probabilité de X est donnée dans le tableau ci-dessous :

x_i	-5	1	16	
$P\left(\mathrm{X}=x_i\right)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	Total $=1$

$$\mathrm{V}\left(\mathrm{X}\right)=\left(-5\right)^2\times\frac{4}{9}+1^2\times\frac{4}{9}+16^2\times\frac{1}{9}-0^2 \quad \text{(formule de Koenig-Huygens)}$$

$$=25\times\frac{4}{9}+1\times\frac{4}{9}+256\times\frac{1}{9}$$

$$=\frac{100+4+256}{9}$$

$$=\frac{360}{9}$$

$$=40$$

Pour $n = 3$, la loi de probabilité de Y est donnée dans le tableau ci-dessous :

y_i	-5	1	16	
$P(\mathrm{Y} = y_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	Total $= 1$

On observe que Y a la même loi de probabilité que X dans ce cas.
Donc Y a la même variance que X dans ce cas.

$\mathrm{V}(\mathrm{Y}) = 40$