1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 24 janvier 2017 (50 minutes)

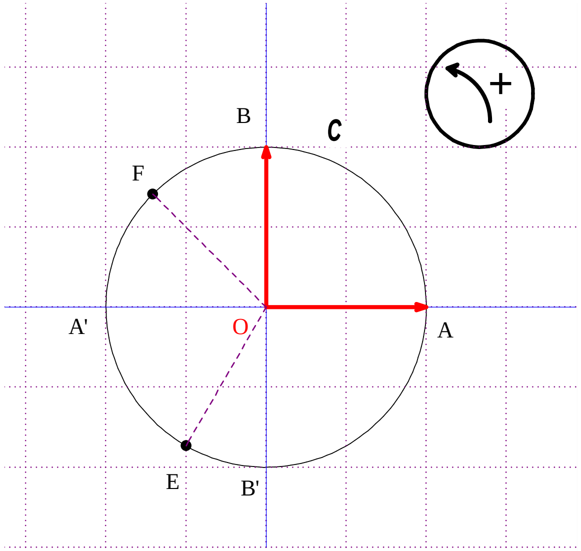
Prénom et nom : …………………………..…………

Note : ….. / 20

Dans les exercices **I**, **II**, **III**, le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O. On note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique et on considère les points $\text{A}(1\,;0)$, $\text{B}(0\,;1)$, $\text{A'}(-1\,;0)$, $\text{B'}(0\,;-1)$. Il est demandé de ne rien écrire sur les figures.

I. (2 points)

On note E et F les points de $\mathcal{C}$ associés aux réels $-\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$. On a donc $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\,;\overrightarrow{\text{OE}}\right)=-\dfrac{2\pi}{3}$ et $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\,;\overrightarrow{\text{OF}}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$.



Quelle est la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OE}}\,;\overrightarrow{\text{OF}}\right)$? Répondre sans justifier.

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OE}}\,;\overrightarrow{\text{OF}}\right)$ est égale à ……………….. .

II. (2 points)

Pour tout entier relatif k, on note M_k l'image de $k\pi$ sur le cercle $\mathcal{C}$.

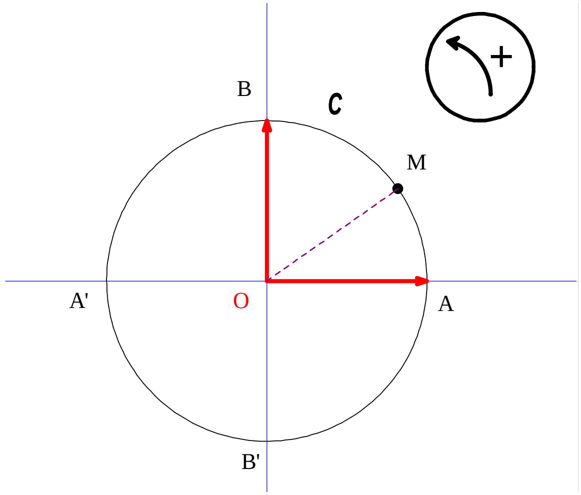
Déterminer la position de M_k suivant la parité de k. Compléter par une lettre.

- Si k est pair, alors M_k est confondu avec ………
- Si k est impair, alors M_k est confondu avec ………

III. (2 points)

Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}$ associé à un réel x.

Construire sur la figure ci-dessus les points M' et M'' de $\mathcal{C}$ associés respectivement à $-x$ et à $x+2017\pi$.



IV. (4 points : 2 points par réponse)

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté tels que $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=-\dfrac{\pi}{9}$ et $\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)=\dfrac{4\pi}{9}$.

Compléter les égalités suivantes en donnant à chaque fois la mesure principale en radians (un seul résultat à chaque fois). Justifier par un calcul sur les lignes ci-dessous.

$\left(\vec{v}\,;\vec{w}\right)=$ …………… $\left(\vec{w}\,;-3\vec{u}\right)=$ ……………

……

……

……

……

……

……

……

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Il est demandé de ne pas introduire de notations et de veiller à une présentation très propre des calculs.
On débutera sèchement les calculs avant de rédiger une phrase de conclusion.

1°) Les nombres $a=\sqrt{(1-5\pi)^2}$, $b=2\pi-1$ et $c=-\pi-1$ sont-ils en progression arithmétique (c'est-à-dire sont-ils dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique) ? Justifier (on fera les calculs d'abord avant de conclure).

……

……

……

……

……

……

2°) Même question avec les nombres $a=8-\left(1-\sqrt{2}\right)^2$, $b=\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}$ et $c=1-\left(\sqrt{2}-\sqrt{18}\right)$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

VI. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Soit (u_n) une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ de raison $r=-\dfrac{1}{27}$ telle que $u_{81}=100$.

1°) Calculer le premier terme u_0.

2°) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n<0$.

3°) La suite (u_n) est-elle strictement croissante ou strictement décroissante ?

1°) $u_0=$.................. (un seul résultat sans égalité) ; 2°) .... (un seul résultat sans égalité)

3°) La suite (u_n) est strictement …………………………….. car ……………………………………………………

VII. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère l'algorithme ci-contre rédigé en langage naturel.
On précise que :
• les variables n et i sont des entiers naturels ;
• la variable u est un entier relatif ;
• la valeur de n saisie en entrée doit être supérieure ou égale à 1.

On ne demande pas de programmer cet algorithme sur calculatrice.

Entrée :
Saisir *n*

Initialisation :
u prend la valeur 1

Traitement :
Pour *i* variant de 1 à *n* **Faire**
| *u* prend la valeur – 2*u*
FinPour

Sortie :
Afficher *u*

1°) Faire tourner « à la main » cet algorithme lorsque l'on saisit la valeur 4 pour n en entrée.
On remplira pour cela le tableau suivant présentant l'évolution des variables i et u.

i		1	2	3	4
u	1	…………...	…………...	…………...	…………...

Quelle est la valeur de u affichée en sortie ?

………………… (une seule réponse, sans faire de phrase sans égalité)

2°) Exprimer en fonction de n la valeur de la variable u affichée en sortie.

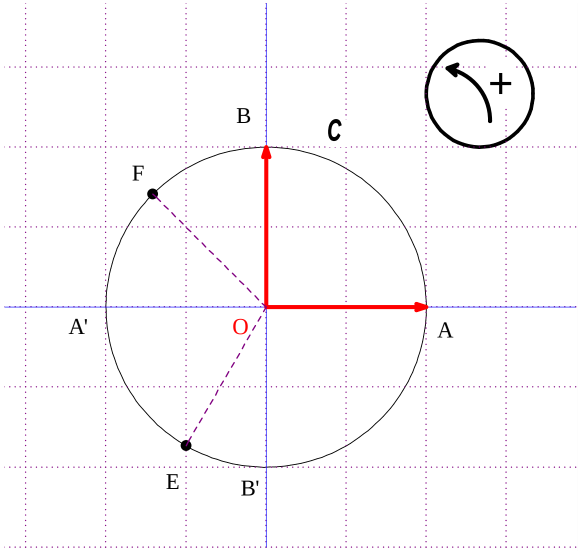
………………… (une seule réponse, sans faire de phrase, sans égalité)

Corrigé du contrôle du 24-1-2017

Dans les exercices **I**, **II**, **III**, le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O. On note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique et on considère les points $\mathrm{A}(1\,;0)$, $\mathrm{B}(0\,;1)$, $\mathrm{A'}(-1\,;0)$, $\mathrm{B'}(0\,;-1)$. Il est demandé de ne rien écrire sur les figures.

I.

On note E et F les points de $\mathcal{C}$ associés aux réels $-\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{3\pi}{4}$. On a donc $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OE}}\right)=-\frac{2\pi}{3}$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)=\frac{3\pi}{4}$.



Quelle est la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{OE}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)$? Répondre sans justifier.

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{OE}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)$ est égale à $-\frac{7\pi}{12}$.

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OE}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)=\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OE}}\right) \quad \text{(relation de Chasles en forme soustractive)}$$

$$=\frac{3\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}$$

$$=\frac{17\pi}{12}$$

On a $\frac{17\pi}{12}=2\pi-\frac{7\pi}{12}$ donc la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{OE}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)$ est égale à $-\frac{7\pi}{12}$.

On peut aussi utiliser (appliquer) directement le résultat donné dans le cours.

> Si M et N sont deux points du cercle trigonométrique associés respectivement à deux réels x et y, alors une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}\,;\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right)$ est $y-x$.

II.

Pour tout entier relatif k, on note M_k l'image de $k\pi$ sur le cercle $\mathcal{C}$.

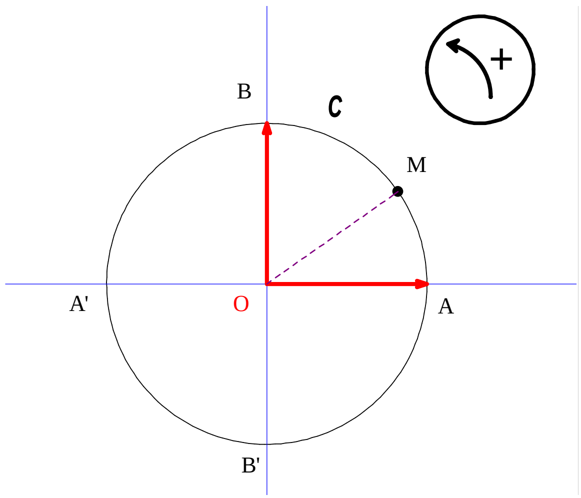
Déterminer la position de M_k suivant la parité de k. Compléter par une lettre.

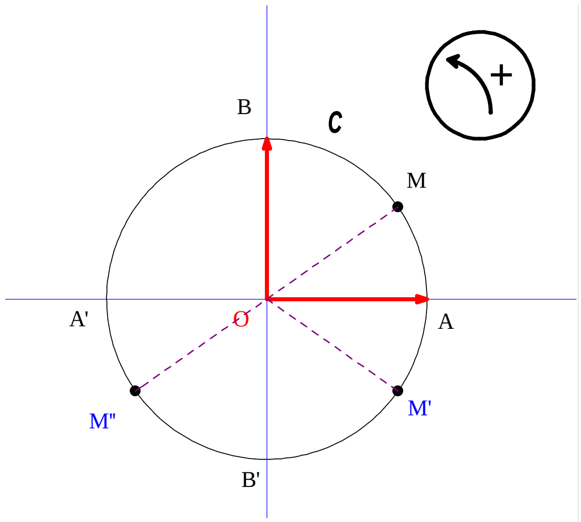
- Si k est pair, alors M_k est confondu avec A.
- Si k est impair, alors M_k est confondu avec A'.

III.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}$ associé à un réel x.

Construire sur la figure ci-dessus les points M' et M" de $\mathcal{C}$ associés respectivement à $-x$ et à $x+2017\pi$.





M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.
M" est le symétrique de M par rapport à O.

IV.

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté tels que $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=-\dfrac{\pi}{9}$ et $\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)=\dfrac{4\pi}{9}$.

Compléter les égalités suivantes en donnant à chaque fois la mesure principale en radians (un seul résultat à chaque fois). Justifier par un calcul sur les lignes ci-dessous.

$\left(\vec{v}\,;\vec{w}\right)=\dfrac{5\pi}{9}$ $\qquad\qquad$ $\left(\vec{w}\,;-3\vec{u}\right)=\dfrac{5\pi}{9}$

$\left(\vec{v}\,;\vec{w}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)-\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ (relation de Chasles pour les angles orientés)

$$=\frac{4\pi}{9}+\frac{\pi}{9}$$
$$=\frac{5\pi}{9}$$

$\left(\vec{w}\,;-3\vec{u}\right)=\left(\vec{w}\,;\vec{u}\right)+\pi$ (car 1 et – 3 sont de signes contraires)

$$=-\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)+\pi$$
$$=-\frac{4\pi}{9}+\pi$$
$$=\frac{5\pi}{9}$$

V.

Il est demandé de ne pas introduire de notations et de veiller à une présentation très propre des calculs.
On débutera sèchement les calculs avant de rédiger une phrase de conclusion.

1°) Les nombres $a=\sqrt{(1-5\pi)^2}$, $b=2\pi-1$ et $c=-\pi-1$ sont-ils en progression arithmétique (c'est-à-dire sont-ils dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique) ? Justifier (on fera les calculs d'abord avant de conclure).

On commence par transformer a.
On travaille en valeurs exactes (pas de valeurs approchées).

$$a=\sqrt{(1-5\pi)^2}$$
$$=|1-5\pi|$$
$$=-(1-5\pi)$$
$$=5\pi-1$$

On utilise la méthode des différences (test des différences).

$$b-a=2\pi-1-(5\pi-1)=-3\pi$$

$$c-b=-\pi-1-(2\pi-1)=-3\pi$$

Les différences sont égales donc les nombres a, b et c forment dans cet ordre une suite arithmétique de raison -3π.

2°) Même question avec les nombres $a=8-\left(1-\sqrt{2}\right)^2$, $b=\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}$ et $c=1-\left(\sqrt{2}-\sqrt{18}\right)$.

On commence par transformer a, b et c.
On travaille en valeurs exactes (pas de valeurs approchées).

$$a=8-\left(1-2\sqrt{2}+2\right)$$
$$=8-\left(3-2\sqrt{2}\right)$$
$$=5+2\sqrt{2}$$

$$b=\frac{1\times\left(3+2\sqrt{2}\right)}{\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)}$$
$$=\frac{3+2\sqrt{2}}{1}$$
$$=3+2\sqrt{2}$$

$$c=1-\left(\sqrt{2}-3\sqrt{2}\right)$$
$$=1-\left(-2\sqrt{2}\right)$$
$$=1+2\sqrt{2}$$

$$b-a=3+2\sqrt{2}-\left(5+2\sqrt{2}\right)=-2$$

$$c-b=1+2\sqrt{2}-\left(3+2\sqrt{2}\right)=-2$$

Les différences sont égales donc les nombres a, b et c forment dans cet ordre une suite arithmétique de raison – 2.

VI.

Soit (u_n) une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ de raison $r=-\dfrac{1}{27}$ telle que $u_{81}=100$.

1°) Calculer le premier terme u_0.

2°) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n<0$.

3°) La suite (u_n) est-elle strictement croissante ou strictement décroissante ?

1°) $u_0=103$ (un seul résultat sans égalité) ; 2°) 2782 (un seul résultat sans égalité)

3°) La suite (u_n) est strictement décroissante car sa raison est strictement négative.

1°) D'après la formule donnant le terme général d'une suite arithmétique, on a : $u_{81}=u_0+81\times\left(-\dfrac{1}{27}\right)$ (1).

(1) donne alors $100=u_0-3$ d'où $u_0=103$.

2°)

1ère méthode : par calcul

D'après la question 1°), $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad u_n=103-\dfrac{n}{27}$ $\quad$ (car $n\times\left(-\dfrac{1}{27}\right)=-\dfrac{n}{27}$).

On cherche les entiers naturels n tel que $u_n<0$ $\quad(2)$.

$(2) \Leftrightarrow 103 - \dfrac{n}{27} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{n}{27} > 103$

$\Leftrightarrow n > 103 \times 27$

$\Leftrightarrow n > 2781$

Le plus petit entier naturel n tel que (2) soit vérifiée est donc 2782.

2^e^ méthode : par calculatrice

3°) On utilise directement la propriété du cours qui donne le sens de variation d'une suite arithmétique suivant le signe de la raison.

VII.

On considère l'algorithme ci-contre rédigé en langage naturel.
On précise que :
• les variables n et i sont des entiers naturels ;
• la variable u est un entier relatif ;
• la valeur de n saisie en entrée doit être supérieure ou égale à 1.

On ne demande pas de programmer cet algorithme sur calculatrice.

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
u prend la valeur 1

Traitement :
Pour i variant de 1 à n **Faire**
│ u prend la valeur $-2u$
FinPour

Sortie :
Afficher u

1°) Faire tourner « à la main » cet algorithme lorsque l'on saisit la valeur 4 pour n en entrée.
On remplira pour cela le tableau suivant présentant l'évolution des variables i et u.

i		1	2	3	4
u	1	– 2	4	– 8	16

Quelle est la valeur de u affichée en sortie ?

16 (une seule réponse, sans faire de phrase <u>sans égalité</u>)

2°) Exprimer en fonction de n la valeur de la variable u affichée en sortie.

$(-2)^n$ (une seule réponse, sans faire de phrase, <u>sans égalité</u>)