TS1

Contrôle du vendredi 20 janvier 2017 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..……………

Note : …….. **/ 20**

On prendra soin de ne rien écrire sur l'énoncé en dehors de ce qui est demandé.

I. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \sin^2 x + \sqrt{3}\cos x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Démontrer que f est périodique.

……..

……..

……..

2°) Démontrer que f est paire.

……..

……..

……..

……..

3°) Justifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = \sin x\left(2\cos x - \sqrt{3}\right)$ (justification de la dérivabilité non demandée).

……..

……..

……..

……..

4°) Compléter le tableau ci-dessous sans justifier les lignes de signes.

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ π
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

Calculer les valeurs exactes des extremums de f sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ (notamment les images de 0 et de π) et compléter le tableau de variations de f avec ces valeurs.

II. (3 points)

La fonction tangente est la fonction $\tan : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Démontrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

III. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \cos 2x \times e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que la fonction $F : x \mapsto \dfrac{\cos 2x + 2\sin 2x}{5} \times e^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Il est demandé de présenter toutes les étapes de calcul.
On présentera les calculs en colonne et on pensera à écrire « $\forall x \in \mathbb{R}$ » sur la première ligne.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

IV. (8 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 3 points ; 4°) 2 points)

Dans l'exercice, on considère la fonction $f : x \mapsto 3\cos x - \sin x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$.

On note α le réel de l'intervalle $[0 ; \pi]$ tel que $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

1°) Calculer $\sin\alpha$. On donnera le résultat en valeur exacte sans justifier.

…………… (un seul résultat sans justifier)

2°) Démontrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = \sqrt{10}\cos(\text{..............}) + 2$.

………

………

………

………

………

………

3°)

À l'aide de la question précédente, recopier et compléter la phrase :

Le maximum global de f sur $\mathbb{R}$ est égal à ……………… ; il est obtenu pour les réels de la forme ……………… .
Justifier cette affirmation en quelques lignes.

Faire une phrase similaire pour le minimum global sans justifier.

………

………

………

………

………

………

………

4°) Donner sans justifier l'expression d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

……………………………………………………….. (un seul résultat sans justifier)

Corrigé du contrôle du 20-1-2017

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \sin^2 x + \sqrt{3}\cos x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Démontrer que *f* est périodique.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+2\pi) = \sin^2(x+2\pi) + \sqrt{3}\cos(x+2\pi)$$
$$= \sin^2 x + \sqrt{3}\cos x$$
$$= f(x)$$

On en déduit que *f* est périodique de période 2π.

2°) Démontrer que *f* est paire.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = \sin^2(-x) + \sqrt{3}\cos(-x)$$
$$= (\sin(-x))^2 + \sqrt{3}\cos x$$
$$= (-\sin x)^2 + \sqrt{3}\cos x$$
$$= f(x)$$

On en déduit que *f* est paire.

3°) Justifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = \sin x\left(2\cos x - \sqrt{3}\right)$ (justification de la dérivabilité non demandée).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2\sin x \times \cos x - \sin x \times \sqrt{3}$$
$$= \sin x\left(2\cos x - \sqrt{3}\right)$$

4°) Compléter le tableau ci-dessous sans justifier les lignes de signes.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		π
Signe de $\sin x$	0	$+$		$+$	0
Signe de $2\cos x - \sqrt{3}$		$+$	0	$-$	
Signe de $f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
Variations de f	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{7}{4}$	$\searrow$	$-\sqrt{3}$

Calculer les valeurs exactes des extremums de *f* sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ (notamment les images de 0 et de π) et compléter le tableau de variations de *f* avec ces valeurs.

II.

La fonction tangente est la fonction $\tan : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Démontrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\quad \tan'(x) = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\quad \tan' x > 0$ donc la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Autre méthode :

On peut aussi écrire autrement la dérivée de tan.

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\quad \tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2$$

$$= 1 + \tan^2 x$$

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto \cos 2x \times \mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \dfrac{\cos 2x + 2\sin 2x}{5} \times \mathrm{e}^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Il est demandé de présenter toutes les étapes de calcul.
On présentera les calculs en colonne et on pensera à écrire « $\forall x \in \mathbb{R}$ » sur la première ligne.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}'(x) = \frac{-2\sin 2x + 4\cos 2x}{5} \times \mathrm{e}^x + \frac{\cos 2x + 2\sin 2x}{5} \times \mathrm{e}^x$$

$$= \left(\frac{-2\sin 2x + 4\cos 2x}{5} + \frac{\cos 2x + 2\sin 2x}{5}\right) \times \mathrm{e}^x$$

$$= \frac{\cancel{-2\sin 2x} + 4\cos 2x + \cos 2x \cancel{+2\sin 2x}}{5} \times \mathrm{e}^x$$

$$= \frac{\cancel{-2\sin 2x} + 4\cos 2x + \cos 2x \cancel{+2\sin 2x}}{5} \times \mathrm{e}^x$$

$$= \frac{\cancel{5}\cos 2x}{\cancel{5}} \times \mathrm{e}^x$$

$$= \cos 2x \times \mathrm{e}^x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}'(x) = f(x)$$

On en déduit que la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

IV.

Dans l'exercice, on considère la fonction $f : x \mapsto 3\cos x - \sin x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$.

On note α le réel de l'intervalle $[0\,;\pi]$ tel que $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

1°) Calculer $\sin\alpha$. On donnera le résultat en valeur exacte sans justifier.

$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ (un seul résultat sans justifier)

D'après la relation fondamentale, on a : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

D'où $\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 + \sin^2\alpha = 1$ ce qui donne immédiatement $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{10}$.

On en déduit que $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ ou $\sin\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Or $\alpha \in [0\,;\pi]$. Donc $\sin\alpha \geqslant 0$.

Finalement, on peut écrire $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Une mauvaise méthode consiste à « trouver » α avec la calculatrice et à utiliser la valeur approchée obtenue avec la calculatrice pour calculer $\sin\alpha$.

2°) Démontrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = \sqrt{10}\cos(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) + 2$.

On force la factorisation de $3\cos x - \sin x$ par $\sqrt{10}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{10}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{10}}\sin x\right) + 2$$

$$= \sqrt{10}\left(\cos\alpha\cos x - \sin\alpha\sin x\right) + 2$$

$$= \sqrt{10}\cos(x + \alpha) + 2$$

Autre méthode (plus facile ?) :

On peut partir de $\sqrt{10}\cos(x+\alpha) + 2$ est développer cette expression.

3°)

À l'aide de la question précédente, recopier et compléter la phrase :

Le maximum global de f sur $\mathbb{R}$ est égal à ………………. ; il est obtenu pour les réels de la forme ………………. .
Justifier cette affirmation en quelques lignes.

Le maximum global de f sur $\mathbb{R}$ est égal à $2 + \sqrt{10}$; il est obtenu pour les réels de la forme $-\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On procède par inégalités successives.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leqslant \cos(x+\alpha) \leqslant 1$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\sqrt{10} \leqslant \sqrt{10}\cos(x+\alpha) \leqslant \sqrt{10}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2-\sqrt{10} \leqslant f(x) \leqslant 2+\sqrt{10}$

On a démontré que *f* est bornée par $2-\sqrt{10}$ et $2+\sqrt{10}$.

La borne $2+\sqrt{10}$ est atteinte en tout réel *x* tel que $\cos(x+\alpha)=1 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow x+\alpha = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = -\alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$2+\sqrt{10}$ est donc le maximum global de *f* sur $\mathbb{R}$.

Faire une phrase similaire pour le minimum global sans justifier.

Le minimum global de *f* sur $\mathbb{R}$ est égal à $2-\sqrt{10}$; il est obtenu pour les réels de la forme $\pi - \alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

4°) Donner sans justifier l'expression d'une primitive F de *f* sur $\mathbb{R}$.

$\mathrm{F}(x) = 3\sin x + \cos x + 2x$ (un seul résultat sans justifier)