1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 17 janvier 2017 (50 minutes)

Prénom et nom : ………………………..………….

Note : ….. / 20

I. (7 points)

Partie 1 (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto x(8-x)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

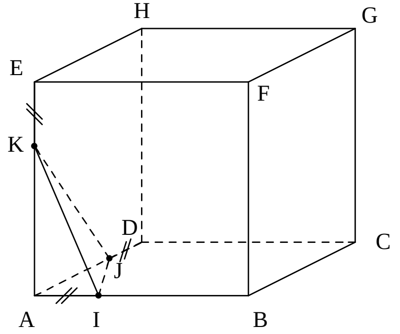
1°) Calculer $f'(x)$. On donnera le résultat sous forme factorisée.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) =$ .... (un seul résultat)

2°) Faire un tableau comprenant l'étude précise du signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.
On calculera au brouillon les extremums locaux.
On tracera les traits, flèches de variations, barres de fraction à la règle.

Partie 2 (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 8 cm. À tout point I du segment $[\text{AB}]$, on associe le point J du segment $[\text{AD}]$ et le point K du segment $[\text{AE}]$ tels que : $\text{AI} = \text{DJ} = \text{EK}$.



(ne rien écrire sur la figure)

On pose $\text{AI} = x$ cm ($x \in [0\,;8]$) et on note $\text{V}(x)$ le volume en cm^3 du tétraèdre AIJK.

1°) Exprimer $\text{V}(x)$ en fonction de *x* sous forme factorisée.

…………………………………………………………………..……………………………………………

…………………………………………………………………..……………………………………………

…………………………………………………………………..……………………………………………

…………………………………………………………………..……………………………………………

…………………………………………………………………..……………………………………………

…………………………………………………………………..……………………………………………

…………………………………………………………………..……………………………………………

…………………………………………………………………..……………………………………………

…………………………………………………………………..……………………………………………

2°) Pour quelle valeur de *x* le volume du tétraèdre AIJK est-il maximal ? Justifier brièvement.

…………………………………………………………………..……………………………………………

…………………………………………………………………..……………………………………………

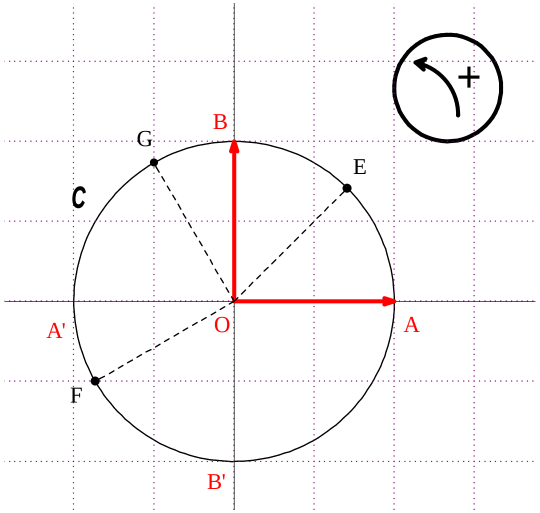
…………………………………………………………………..……………………………………………

…………………………………………………………………..……………………………………………

…………………………………………………………………..……………………………………………

II. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point ; 4°) 2 points)

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O. On note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique et on considère les points $\text{A}(1\,;0)$, $\text{B}(0\,;1)$, $\text{A}'(-1\,;0)$, $\text{B}'(0\,;-1)$. Les points E, F et G sont trois points de $\mathcal{C}$ comme l'indique la figure au verso.



1°) Quelle est la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OE}\right)$?

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OE}\right)$ est égale à ……………. .

2°) Déterminer tous les réels de l'intervalle $[-2\pi\,;2\pi]$ associés au point G.

…………………………………………………

(écrire les nombres séparés par une virgule, sans égalité et sans faire de phrase)

3°) On note H l'image de $-\dfrac{2017\pi}{4}$ sur le cercle $\mathcal{C}$.

Quelle est la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OH}\right)$? Répondre sans justifier ; placer le point H sur la figure et représenter la mesure principale.

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OH}\right)$ est égale à ……………. .

4°) Quel est l'ensemble des réels x de l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\frown}{EF}$ (extrémités comprises) ? Répondre sans justifier, ni faire de phrase.

…………………………………..

III. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

Une classe compte 30 élèves dont 20 filles. À chaque cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard un élève de la classe, sans se rappeler quels élèves il a déjà interrogés.
Pour les questions 1°) et 2°), on donnera les valeurs exactes des probabilités sous forme de fractions irréductibles.

1°) Quelle est la probabilité que, sur trois cours consécutifs, soient interrogées deux filles exactement ?

………………….. (un seul résultat, sans égalité)

2°) Quelle est la probabilité que, sur trois cours consécutifs, soient interrogés au moins une fille et un garçon ?

………………….. (un seul résultat, sans égalité)

3°) Quel doit être le nombre minimal de cours consécutifs pour que la probabilité qu'au moins un garçon soit interrogé soit strictement supérieure à 0,999 ?

…………… (une seule réponse, sans égalité)

IV. (1 point)

Afin de créer une loterie, on place dans une urne n boules indiscernables au toucher ($n \geqslant 3$) dont deux et deux seulement sont gagnantes. On choisit au hasard deux boules de l'urne en remettant la première boule tirée avant d'en tirer une seconde.
Calculer la probabilité p_n d'avoir exactement une boule gagnante parmi les deux.

$p_n =$ ……………………………….. (un seul résultat)

V. (1 point)

Pour tout entier naturel n, on pose $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k$.

Déterminer la valeur de A_n suivant la parité de n.

• Si n est pair, $A_n =$ ……….. .

• Si n est impair, $A_n =$ ……….. .

VI. (1 point + 1 point bonus)

Jean est en train de lire un livre. En additionnant les numéros de toutes les pages qu'il a déjà lues, il obtient 351. En additionnant les numéros de toutes les pages qu'il lui reste à lire, il obtient 469.
Indication pour la résolution : On pourra utiliser la commande Rép ou Ans de la calculatrice.

À quelle page en est Jean ?

…………………………..

Combien de pages comporte ce livre ?

…………………………..

Conseils donnés à l'oral

I.

Partie 1

2°) Ne pas oublier les 0 dans le tableau de variations.

Partie 2

1°) Appliquer les formules en situation.

VI.

Éclaircissements sur l'énoncé.

Corrigé du contrôle du 17-1-2017

I.

Il s'agit d'un problème d'optimisation (avec modélisation d'une situation géométrique par une fonction).

Partie 1

On considère la fonction $f : x \mapsto x(8-x)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$. On donnera le résultat sous forme factorisée.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = (8-x)(8-3x) \text{ (un seul résultat)}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = 1 \times (8-x)^2 + x \times 2 \times (-1) \times (8-x)$ (« sous-dérivée » à faire)

$= (8-x)^2 - 2x(8-x)$

$= (8-x)\left[(8-x) - 2x\right]$ (factorisation)

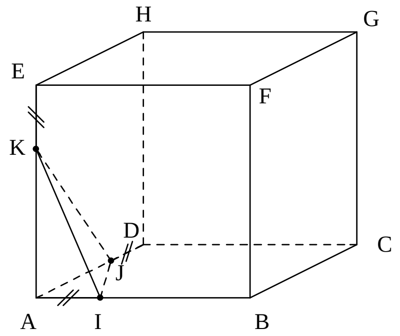
$= (8-x)(8-3x)$

2°) Faire un tableau comprenant l'étude précise du signe de $f'(x)$ et les variations de f.
On calculera au brouillon les extremums locaux.
On tracera les traits, flèches de variations, barres de fraction à la règle.

x	$-\infty$		$\frac{8}{3}$		8		$+\infty$
Signe de $8-x$		+		+	0	−	
Signe de $8-3x$		+	0	–		–	
Signe de $f'(x)$		+	0	–	0	+	
Variations de f		↗	$\frac{2048}{27}$	↘	0	↗	

Partie 2

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 8 cm. À tout point I du segment $[AB]$, on associe le point J du segment $[AD]$ et le point K du segment $[AE]$ tels que : $AI = DJ = EK$.



(ne rien écrire sur la figure)

On pose $AI = x$ cm ($x \in [0\,;8]$) et on note $V(x)$ le volume en cm^3 du tétraèdre AIJK.

1°) Exprimer $V(x)$ en fonction de x sous forme factorisée.

$$V(x) = \frac{\mathcal{A}_{AIJ} \times AK}{3}$$

$$= \frac{\frac{AI \times AJ}{2} \times AK}{3}$$

$$= \frac{\frac{AI \times AJ \times AK}{2}}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{AI \times AJ \times AK}{2} \text{ (étape facultative)}$$

$$= \frac{AI \times AJ \times AK}{6}$$

$$= \frac{x \times (8-x) \times (8-x)}{6}$$

$$= \frac{x \times (8-x)^2}{6}$$

2°) Pour quelle valeur de x le volume du tétraèdre AIJK est-il maximal ? Justifier brièvement.

On constate que $\forall x \in [0\,;8]\quad V(x)=\dfrac{1}{6}f(x)$.

Or $\dfrac{1}{6}>0$.

Donc V a les mêmes variations que f sur $[0\,;8]$.

D'après le tableau de variations établi à la question 2°) de la partie 1, le maximum de f sur l'intervalle $[0\,;8]$ est égal à $\dfrac{2048}{27}$; il est obtenu pour $x=\dfrac{8}{3}$.

Donc le volume du tétraèdre AIJK est maximal pour $x=\dfrac{8}{3}$.

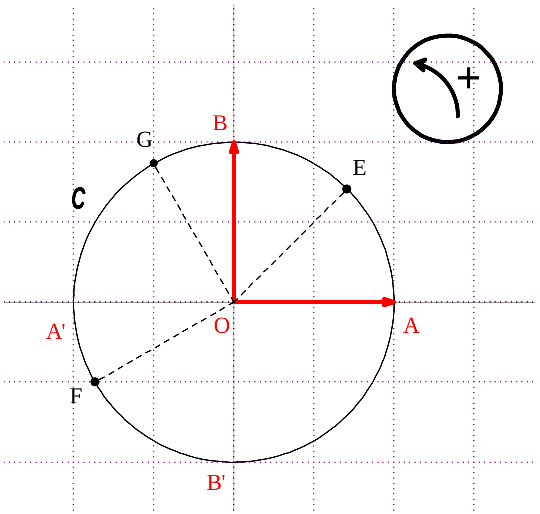
On peut déterminer le volume maximal (bien que cela n'était pas demandé).

$$V\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{\frac{2048}{27}}{6}=\frac{1}{6}\times\frac{2048}{27}=\frac{1024}{81}$$

Le volume maximal du tétraèdre AIJK est égal à $\dfrac{1024}{81}$ cm^3.

II.

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O. On note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique et on considère les points $A(1\,;0)$, $B(0\,;1)$, $A'(-1\,;0)$, $B'(0\,;-1)$. Les points E, F et G sont trois points de $\mathcal{C}$ comme l'indique la figure au verso.



1°) Quelle est la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OE}\right)$?

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OE}\right)$ est égale à $-\dfrac{\pi}{4}$.

2°) Déterminer tous les réels de l'intervalle $[-2\pi\,;2\pi]$ associés au point G.

$$-\frac{4\pi}{3}\ ;\ \frac{2\pi}{3}$$

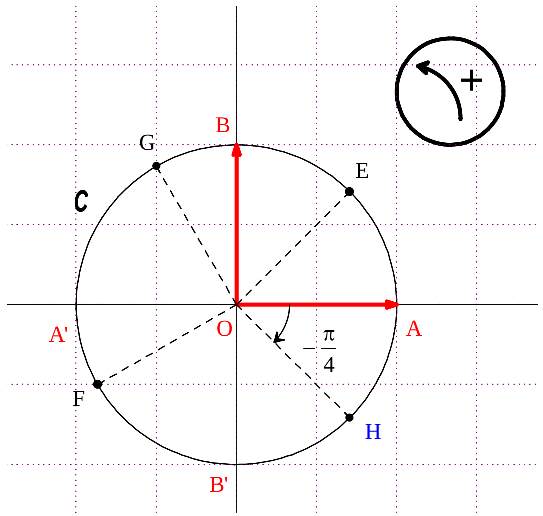
(écrire les nombres séparés par une virgule, sans égalité et sans faire de phrase)

3°) On note H l'image de $-\dfrac{2017\pi}{4}$ sur le cercle $\mathcal{C}$.

Quelle est la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OH}\right)$? Répondre sans justifier ; placer le point H sur la figure et représenter la mesure principale.

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OH}\right)$ est égale à $-\dfrac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned}-\frac{2017\pi}{4}&=-\frac{2016\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\\&=-504\pi-\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$



4°) Quel est l'ensemble des réels x de l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\frown}{EF}$ (extrémités comprises) ? Répondre sans justifier, ni faire de phrase.

$$\left[-\pi\,;-\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{4}\,;\pi\right]$$

III.

Une classe compte 30 élèves dont 20 filles. À chaque cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard un élève de la classe, sans se rappeler quels élèves il a déjà interrogés.
Pour les questions 1°) et 2°), on donnera les valeurs exactes des probabilités sous forme de fractions irréductibles.

1°) Quelle est la probabilité que, sur trois cours consécutifs, soient interrogées deux filles exactement ?

$\frac{4}{9}$ (un seul résultat, sans égalité)

On dresse un arbre de probabilités avec les événements A : « l'élève interrogé est un garçon » et B : « l'élève interrogé est une fille ».

On note E l'événement : « Deux filles exactement sur trois cours consécutifs sont interrogées ».

$$\begin{aligned} P(\text{E}) &= P(\text{A-B-B}) + P(\text{B-A-B}) + P(\text{B-B-A}) \\ &= 3 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

2°) Quelle est la probabilité que, sur trois cours consécutifs, soient interrogés au moins une fille et un garçon ?

$\frac{2}{3}$ (un seul résultat, sans égalité)

On note F l'événement : « Au moins une fille et un garçon sur trois cours consécutifs sont interrogées ».

$$P(\text{F}) = \frac{2}{3}$$

3°) Quel doit être le nombre minimal de cours consécutifs pour que la probabilité qu'au moins un garçon soit interrogé soit strictement supérieure à 0,999 ?

18 (une seule réponse, sans égalité)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note p_n la probabilité qu'au moins un garçon soit interrogé durant n jours consécutifs.

$$\begin{aligned} p_n &= P(\text{« au moins un garçon est interrogé durant } n \text{ jours consécutifs »}) \\ &= 1 - P(\text{« aucun garçon n'est interrogé durant } n \text{ jours consécutifs »}) \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

On cherche le plus petit entier naturel n tel que $p_n > 0,999$ soit $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0,999$.

On rentre la fonction $f : x \mapsto 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x$ définie sur $\mathbb{R}$ dans la calculatrice.

On cherche dans la table le plus petit entier naturel n tel que $f(n) > 0,999$.

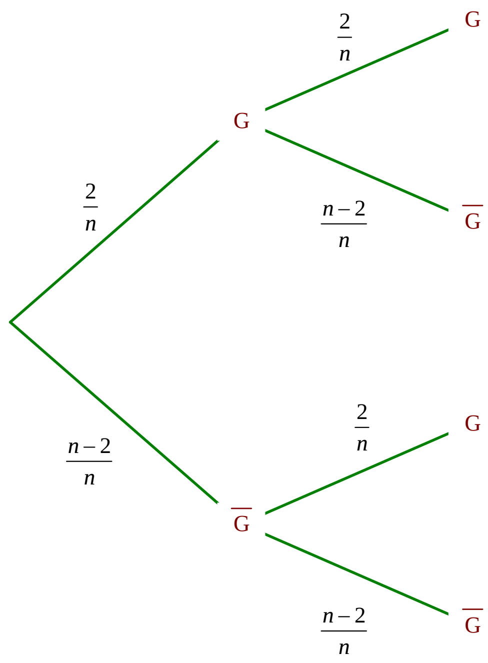
On trouve $n = 18$.

IV.

Afin de créer une loterie, on place dans une urne n boules indiscernables au toucher ($n \geqslant 3$) dont deux et deux seulement sont gagnantes. On choisit au hasard deux boules de l'urne en remettant la première boule tirée avant d'en tirer une seconde.
Calculer la probabilité p_n d'avoir exactement une boule gagnante parmi les deux.

$p_n = \frac{4(n-2)}{n^2}$ (un seul résultat)

On dresse un arbre de probabilités avec l'événement G : « tirer une boule gagnante ».



On note A l'événement : « obtenir exactement une boule gagnante parmi les deux ».

$p_n = P(\mathrm{A})$

$= P\left(\mathrm{G}-\overline{\mathrm{G}}\right) + P\left(\overline{\mathrm{G}}-\mathrm{G}\right)$

$= \frac{2}{n} \times \frac{n-2}{n} + \frac{n-2}{n} \times \frac{2}{n}$ (principe multiplicatif car il s'agit d'épreuves indépendantes)

$= \frac{4(n-2)}{n^2}$

V.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $\mathrm{A}_n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k$.

Déterminer la valeur de A_n suivant la parité de *n*.

- Si *n* est pair, $\mathrm{A}_n = 1$.
- Si *n* est impair, $\mathrm{A}_n = 0$.

VI.

Jean est en train de lire un livre. En additionnant les numéros de toutes les pages qu'il a déjà lues, il obtient 351. En additionnant les numéros de toutes les pages qu'il lui reste à lire, il obtient 469.
Indication pour la résolution : On pourra utiliser la commande Rép ou Ans de la calculatrice.

À quelle page en est Jean ?

26

À l'aide de la calculatrice, on trouve $1+2+3+...+26 = 351$.

Combien de pages comporte ce livre ?

40

À l'aide de la calculatrice, on trouve $\underbrace{27+28+29+...+40}_{\text{14 pages}} = 469$.

Le nombre total de pages du livre est $26+14=40$.