TS1

Contrôle du samedi 14 janvier 2017 (2 heures)

I. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points)

Soit N et n deux entiers naturels tels que $1 \leqslant n < N$.
Une urne contient N boules : n blanches et $N-n$ noires.
On tire une première boule au hasard dans l'urne et l'on note sa couleur.
On tire ensuite une deuxième boule au hasard dans l'urne et l'on note sa couleur.
On précise que la première boule tirée n'est pas remise dans l'urne.

1°) On note B_1 l'événement : « La première boule tirée est blanche » et B_2 l'événement : « La deuxième boule tirée est blanche ».
Exprimer en fonction de n et de N la probabilité de B_2.
On donnera cette probabilité sous la forme la plus simple possible.
Que remarque-t-on ?

2°) Dans cette question, on prend $N=5$ et $n=3$.
Soit x un réel strictement positif.
Lors de chacun des deux tirages, le joueur gagne x euros s'il obtient une boule blanche et perd trois euros s'il obtient une boule noire (pour chaque boule blanche, on gagne x euros ; on perd trois euros pour chaque boule noire).
On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux tirages.
Exprimer l'espérance de X en fonction de x (donner l'expression sous forme réduite).
Existe-t-il une valeur de x telle que le jeu soit équitable ? Si oui, donner cette valeur.

II. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On lance deux dés cubiques non truqués dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On donnera tous les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1°) On note A l'événement : « Les deux numéros sont différents » et B l'événement : « La somme des deux numéros est strictement supérieure à 5 ».
Calculer la probabilité des événements A et $A \cap B$.

2°) En déduire la probabilité d'obtenir une somme strictement supérieure à 5 sachant que les deux numéros obtenus sont différents.

III. (3 points)

Lors d'un sondage dans une classe qui compte 20 garçons et 16 filles, les élèves ont dû répondre par oui ou non à une question.
On sait que 4 filles ont répondu oui et que x garçons ont répondu oui (x est un entier naturel tel que $0 \leqslant x \leqslant 20$).
On précise que tous les élèves ont répondu.
On choisit un élève au hasard dans la classe.
On note A l'événement : « L'élève choisi est une fille » et B l'événement : « L'élève choisi a répondu oui ».
On modélise l'expérience aléatoire par une loi d'équiprobabilité P.

Déterminer x pour que les événements A et B soient indépendants pour la loi P.

On rédigera la recherche sur le modèle suivant (à recopier et compléter) :

A et B sont indépendants pour $P \Leftrightarrow$ ……………….. (1) [compléter par une égalité utilisant les événements A et B].

IV. (4 points : 1°) a) 1 point ; b) 1 point ; 2°) 2 points)

On dispose de trois boules indiscernables au toucher numérotées 1, 2, 3 placées dans une urne et de deux pièces équilibrées A et B. Un jeu consiste à tirer plusieurs fois une boule dans l'urne en la remettant chaque fois dans l'urne.
Après chaque tirage, si l'on obtient la boule portant le numéro 1, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient la boule portant le numéro 2, alors on retourne la pièce B et si l'on on obtient la boule portant le numéro 3, alors on ne retourne aucune des deux pièces. Au début du jeu, les deux pièces sont du côté face.

1°) Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1-a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.
Les variables a, b, n, i, r, s sont des entiers naturels. De plus, la valeur de n saisie en entrée doit être supérieure ou égale à 1.

```
Entrée :
Saisir n

Initialisation :
a prend la valeur 0
b prend la valeur 0

Traitement :
Pour i allant de 1 jusqu'à n Faire
    r prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 3 (au sens large)
    Si r = 1
        Alors a prend la valeur 1 – a
    FinSi
    Si r = 2
        Alors b prend la valeur 1 – b
    FinSi
    s prend la valeur a + b
FinPour

Sortie :
Afficher s
```

a) On exécute cet algorithme en saisissant la valeur 3 pour n en entrée et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour r sont 1, 3 et 2.
Quelle est la valeur de s affichée en sortie ?

On pourra compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	r	a	b	s
initialisation			0	0	
1^{er} passage dans la boucle Pour					
2^{e} passage dans la boucle Pour					
3^{e} passage dans la boucle Pour					

b) Cet algorithme permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile ? Répondre par oui ou non sans justifier.

2°) Calculer la probabilité qu'à l'issue de deux tirages de boules dans l'urne, les deux pièces soient du côté face.

V. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Dans les deux questions, z est un nombre complexe quelconque.

1°) On suppose que z est non nul. Démontrer que $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{\mathrm{Re}\,z}{|z|^2}$.

2°) On pose $Z=\dfrac{\bar{z}+|z|}{2}$.
Exprimer Im Z en fonction de Im z. On donnera le résultat sans justifier.

Dans les exercices **VI** et **VIII**, le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

VI. (2 points)

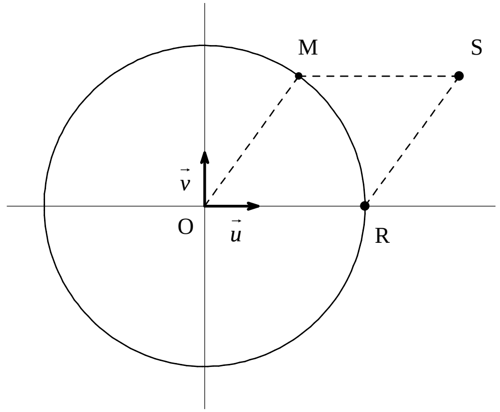
Déterminer l'ensemble E des points M de P, d'affixe z, tels que $\left|\left(\mathrm{i}-\sqrt{3}\right)z\right|+2\left|\mathrm{i}\bar{z}\right|-\left|-z\right|=9$.

La recherche doit être rédigée et présentée correctement.

On attend également une conclusion claire rédigée sur le modèle : « L'ensemble E est … ».

VII. (1 point)

Soit M un point quelconque de P, distinct de O, d'affixe z.
On note :
• R le point d'intersection du cercle de centre O passant par M et de la demi-droite fermée d'origine O et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ (voir graphique ci-dessous) ;
• S le point tel que le quadrilatère OMSR soit un parallélogramme.
Exprimer l'affixe de S en fonction de z.



Prénom et nom : ………………………………………………………….

Note : …….. / 20

I. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points)

1°) ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

II. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

1°) …………… (un seul résultat, sans égalité) …………… (un seul résultat, sans égalité)

2°) …………… (un seul résultat, sans égalité)

III. (3 points)

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

IV. (4 points : 1°) a) 1 point ; b) 1 point ; 2°) 2 points)

1°)

a) …….. (un seul résultat, sans égalité)

b) ……….

2°) ………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

V. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) ………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

2°) ……………………………………………… (une seule égalité)

VI. (2 points)

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

VII. (1 point)

……………………………………………….. (un seul résultat)

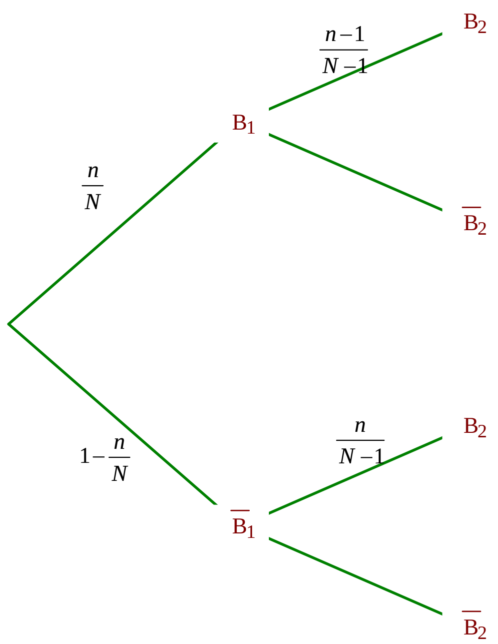
Corrigé du contrôle du 14-1-2017

I.

Soit N et n deux entiers naturels tels que $1 \leqslant n < N$.
Une urne contient N boules : n blanches et $N-n$ noires.
On tire une première boule au hasard dans l'urne et l'on note sa couleur.
On tire ensuite une deuxième boule au hasard dans l'urne et l'on note sa couleur.
On précise que la première boule tirée n'est pas remise dans l'urne.

1°) On note B_1 l'événement : « La première boule tirée est blanche » et B_2 l'événement : « La deuxième boule tirée est blanche ».
Exprimer en fonction de n et de N la probabilité de B_2.
On donnera cette probabilité sous la forme la plus simple possible.
Que remarque-t-on ?

On commence par faire un arbre de probabilités.



On sait que B_1 et $\overline{\mathrm{B}_1}$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(\mathrm{B}_2) = P(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2) + P(\overline{\mathrm{B}_1} \cap \mathrm{B}_2)$$

$$= P(\mathrm{B}_1) \times P(\mathrm{B}_2 / \mathrm{B}_1) + P(\overline{\mathrm{B}_1}) \times P(\mathrm{B}_2 / \overline{\mathrm{B}_1})$$

$$= \frac{n}{N} \times \frac{n-1}{N-1} + \left(1 - \frac{n}{N}\right) \times \frac{n}{N-1}$$

$$= \frac{n(n-1) + (N-n)n}{N(N-1)}$$

$$= \frac{Nn - n}{N(N-1)}$$

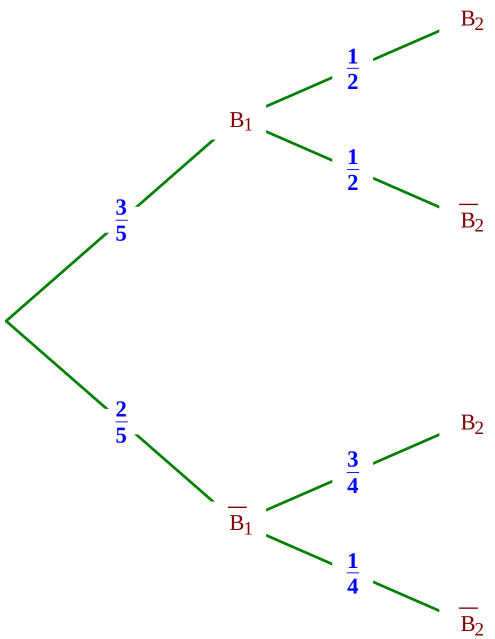
$$= \frac{n\cancel{(N-1)}}{N\cancel{(N-1)}}$$

$$= \frac{n}{N}$$

On constate que $P(\mathrm{B}_2) = P(\mathrm{B}_1)$, résultat un peu surprenant mais qui résulte du calcul effectué.

2°) Dans cette question, on prend $N = 5$ et $n = 3$.
Soit x un réel strictement positif.
Lors de chacun des deux tirages, le joueur gagne x euros s'il obtient une boule blanche et perd trois euros s'il obtient une boule noire (pour chaque boule blanche, on gagne x euros ; on perd trois euros pour chaque boule noire).
On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux tirages.
Exprimer l'espérance de X en fonction de x (donner l'expression sous forme réduite).
Existe-t-il une valeur de x telle que le jeu soit équitable ? Si oui, donner cette valeur.

À l'aide d'un arbre de probabilités, on détermine la loi de probabilité de X (on écrit sur chaque branche les probabilités sous forme de fractions en utilisant les valeurs $N = 5$ et $n = 3$).



X prend les valeurs $2x$ (cas $B_1 - B_2$), $x-3$ (cas $B_1 - \overline{B_2}$ et $\overline{B_1} - B_2$) et -6 (cas : $\overline{B_1} - \overline{B_2}$).

gain algébrique	$2x$	$x-3$	-6	
probabilité	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	Total $=1$

$$\begin{aligned} E(X) &= (x-3)\times\frac{6}{10}+2x\times\frac{3}{10}-6\times\frac{1}{10} \\ &= \frac{3(x-3)}{5}+\frac{3x}{5}-\frac{3}{5} \\ &= \frac{6x-12}{5} \end{aligned}$$

Le jeu est équitable si et seulement si $E(X)=0$

si et seulement si $\frac{6x-12}{5}=0$

si et seulement si $6x-12=0$

si et seulement si $x=2$

II.

On lance deux dés cubiques non truqués dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On donnera tous les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1°) On note A l'événement : « Les deux numéros sont différents » et B l'événement : « La somme des deux numéros est strictement supérieure à 5 ».
Calculer la probabilité des événements A et $A \cap B$.

On peut utiliser un arbre de possibilités ou un tableau à double entrée. Il y a 36 résultats possibles.

Il y a 30 résultats possibles pour lesquels les deux numéros sont différents.

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{30}{36} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Dans le tableau ci-dessous, on donne les sommes possibles.

dé 2 \ dé 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	8	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= \frac{22}{36} \\ &= \frac{11}{18} \end{aligned}$$

2°) En déduire la probabilité d'obtenir une somme strictement supérieure à 5 sachant que les deux numéros obtenus sont différents.

$$\begin{aligned} P(B/A) &= \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{11}{18}}{\frac{5}{6}} \\ &= \frac{11}{3\times\cancel{6}}\times\frac{\cancel{6}}{5} \\ &= \frac{11}{15} \end{aligned}$$

III.

Lors d'un sondage dans une classe qui compte 20 garçons et 16 filles, les élèves ont dû répondre par oui ou non à une question.
On sait que 4 filles ont répondu oui et que x garçons ont répondu oui (x est un entier naturel tel que $0 \leqslant x \leqslant 20$).
On précise que tous les élèves ont répondu.
On choisit un élève au hasard dans la classe.
On note A l'événement : « L'élève choisi est une fille » et B l'événement : « L'élève choisi a répondu oui ».
On modélise l'expérience aléatoire par une loi d'équiprobabilité P.

Déterminer x pour que les événements A et B soient indépendants pour la loi P.

On rédigera la recherche sur le modèle suivant (à recopier et compléter) :

A et B sont indépendants pour $P \Leftrightarrow$ ……………….. (1) [compléter par une égalité utilisant les événements A et B].

On peut remplir un tableau d'effectifs.

	Garçons	Filles	Total
Oui	x	4	$x+4$
Non	$20-x$	12	$32-x$
Total	20	16	36

A et B sont indépendants pour $P \Leftrightarrow P(\text{A} \cap \text{B}) = P(\text{A}) \times P(\text{B})$ (1)

On a : $P(\text{A}) = \dfrac{4}{9}$, $P(\text{B}) = \dfrac{4+x}{36}$, $P(\text{A} \cap \text{B}) = \dfrac{4}{36}$.

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{4}{9} \times \dfrac{4+x}{36} = \dfrac{4}{36}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4+x}{9} = 1$ (on simplifie les dénominateurs égaux à 36 de part et d'autre)

$\Leftrightarrow x = 5$

IV.

On dispose de trois boules indiscernables au toucher numérotées 1, 2, 3 placées dans une urne et de deux pièces équilibrées A et B. Un jeu consiste à tirer plusieurs fois une boule dans l'urne en la remettant chaque fois dans l'urne.
Après chaque tirage, si l'on obtient la boule portant le numéro 1, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient la boule portant le numéro 2, alors on retourne la pièce B et si l'on on obtient la boule portant le numéro 3, alors on ne retourne aucune des deux pièces. Au début du jeu, les deux pièces sont du côté face.

1°) Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1-a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.
Les variables a, b, n, i, r, s sont des entiers naturels. De plus, la valeur de n saisie en entrée doit être supérieure ou égale à 1.

```
Entrée :
Saisir n

Initialisation :
a prend la valeur 0
b prend la valeur 0

Traitement :
Pour i allant de 1 jusqu'à n Faire
    r prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 3 (au sens large)
    Si r = 1
        Alors a prend la valeur 1 − a
    FinSi
    Si r = 2
        Alors b prend la valeur 1 − b
    FinSi
    s prend la valeur a + b
FinPour

Sortie :
Afficher s
```

a) On exécute cet algorithme en saisissant la valeur 3 pour n en entrée et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour r sont 1, 3 et 2.
Quelle est la valeur de s affichée en sortie ?

2

On pourra compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	r	a	b	s
initialisation			0	0	
1^er^ passage dans la boucle Pour	1	1	1	0	1
2^e^ passage dans la boucle Pour	2	3	1	0	1
3^e^ passage dans la boucle Pour	3	2	1	1	2

b) Cet algorithme permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile ? Répondre par oui ou non sans justifier.

oui

2°) Calculer la probabilité qu'à l'issue de deux tirages de boules dans l'urne, les deux pièces soient du côté face.

1[ère] méthode :

Soit p la probabilité que les deux pièces soient du côté face à l'issue des deux tirages de boules dans l'urne.

En deux tirages, il n'y a que 3 façons de trois façons d'obtenir les deux pièces du côté face.
Soit on tire deux fois la boule N°3, et rien ne bouge.
Soit on tire deux fois la boule N°1, et la pièce A est retournée deux fois. Les deux pièces sont donc du côté face.
Soit on tire deux fois la boule N°2 et la pièce B est retournée deux fois. Les deux pièces sont donc du côté face.

Ces trois événements ont une probabilité égale à $\frac{1}{9}$.

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} \\ &= 3\times\frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2[e] méthode :

On fait un arbre de possibilités ou de probabilité.

V.

Dans les deux questions, z est un nombre complexe quelconque.

1°) On suppose que z est non nul. Démontrer que $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{\text{Re}\,z}{|\,z\,|^2}$.

1[ère] méthode :

On pose $z=x+\text{i}y$ où x et y sont deux réels tels que $(x\,;\,y)\neq(0\,;\,0)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{x+\text{i}y} \\ &= \frac{x-\text{i}y}{(x+\text{i}y)(x-\text{i}y)} \\ &= \frac{x-\text{i}y}{x^2+y^2} \\ &= \frac{x}{x^2+y^2}-\text{i}\frac{y}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

On a : $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}$.

Or $\text{Re}\,z=x$ et $|\,z\,|^2=x^2+y^2$.

2[e] méthode :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} \\ &= \frac{\bar{z}}{|\,z\,|^2} \end{aligned}$$

Donc $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\text{Re}\left(\frac{\bar{z}}{|\,z\,|^2}\right)=\frac{1}{|\,z\,|^2}\times\text{Re}\,\bar{z}=\frac{1}{|\,z\,|^2}\times\text{Re}\,z=\frac{\text{Re}\,z}{|\,z\,|^2}$.

2°) On pose $Z=\frac{\bar{z}+|\,z\,|}{2}$.
Exprimer Im Z en fonction de Im z. On donnera le résultat sans justifier.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{x-\text{i}y+\sqrt{x^2+y^2}}{2} \\ &= \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}-\text{i}y}{2} \\ &= \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}-\text{i}\frac{y}{2} \end{aligned}$$

$\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ et $-\frac{y}{2}$ sont deux réels donc l'égalité obtenue au terme du calcul donne bien l'écriture algébrique de Z.

On a donc $\text{Im}\,Z=-\frac{y}{2}$ soit $\text{Im}\,Z=-\frac{\text{Im}\,z}{2}$.

Dans les exercices **VI** et **VIII**, le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

VI.

Déterminer l'ensemble E des points M de P, d'affixe z, tels que $\left|\left(\text{i}-\sqrt{3}\right)z\right|+2\left|\text{i}\bar{z}\right|-\left|-z\right|=9$.

La recherche doit être rédigée et présentée correctement.

On attend également une conclusion claire rédigée sur le modèle : « L'ensemble E est … ».

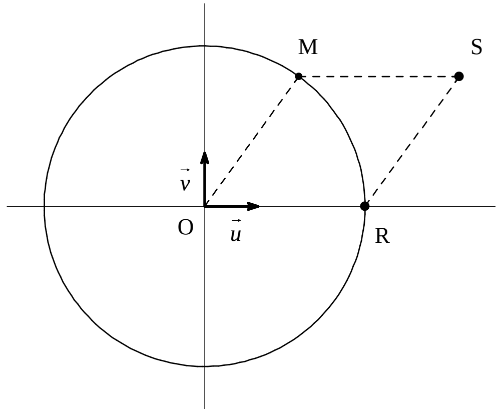
Soit M un point quelconque de P d'affixe $z \in \mathbb{C}$.

$$
\begin{aligned}
\text{M} \in E &\Leftrightarrow \left|\left(\text{i}-\sqrt{3}\right)z\right|+2\left|\text{i}\bar{z}\right|-\left|-z\right|=9\\
&\Leftrightarrow \left|\text{i}-\sqrt{3}\right|\times\left|z\right|+2\times\left|\text{i}\right|\times\left|\bar{z}\right|-\left|z\right|=9\\
&\Leftrightarrow 2\times\left|z\right|+2\times1\times\left|z\right|-\left|z\right|=9\\
&\Leftrightarrow 3\left|z\right|=9\\
&\Leftrightarrow \left|z\right|=3\\
&\Leftrightarrow \text{OM}=3
\end{aligned}
$$

Donc E est le cercle de centre O et de rayon 3.

VII.

Soit M un point quelconque de P, distinct de O, d'affixe z.
On note :
• R le point d'intersection du cercle de centre O passant par M et de la demi-droite fermée d'origine O et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ (voir graphique ci-dessous) ;
• S le point tel que le quadrilatère OMSR soit un parallélogramme.
Exprimer l'affixe de S en fonction de z.



On a : $\text{OR}=\text{OM}=\left|z\right|$.

De plus R appartient à la demi-droite fermée d'origine O et dirigée par le vecteur $\vec{u}$.
Donc son affixe est un réel positif ou nul. Par suite, $z_{\text{R}}=\left|z\right|$.

Le quadrilatère OMSR est un parallélogramme donc on a : $\overrightarrow{\text{OS}}=\overrightarrow{\text{OM}}+\overrightarrow{\text{OR}}$.

On en déduit que $z_{\text{S}}=z_{\text{M}}+z_{\text{R}}=z+\left|z\right|$.