TS1 et TS3 spécialité

Contrôle du lundi 9 janvier 2017 (50 minutes)

Prénom : …………………… **Nom : ………………………………** **Note : …. / 20**

I. (5 points : 2 points + 3 points)

Soit n un entier relatif quelconque. On pose $a=30n^2+21n+13$ et $b=15n^2+8n+6$.

On se propose de déterminer $\text{PGCD}(a\,;b)$ par deux méthodes indépendantes.

1ère méthode : Vérifier au brouillon que les égalités suivantes sont vraies :

$a=2b+5n+1 \quad (1)$; $b=3n\times(5n+1)+5n+6 \quad (2)$; $5n+6=1\times(5n+1)+5 \quad (3)$; $5n+1=n\times5+1 \quad (4)$.

Répondre en utilisant le lemme d'Euclide (et uniquement le lemme d'Euclide !) ainsi que les égalités précédentes.

………

………

………

………

………

………

………

………

2e méthode : Calculer au brouillon $(3n^2+n+1)a-(6n^2+3n+2)b$ (on écrira juste le résultat). Conclure.

………

………

………

………

………

II. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

Soit n un entier relatif quelconque.

1°) En observant que $(n+1)-n=1$, démontrer sans faire aucun calcul que n et $n+1$ sont premiers entre eux.

On répondra par une phrase.

………

………

………

………

2°) Démontrer de la même manière qu'au 1°) que n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

………

………

………

………

3°) Déduire des questions précédentes, à l'aide d'une propriété du cours, que n et $(n+1)(2n+1)$ sont premiers entre eux. Toute réponse mal justifiée ne sera pas prise en compte.

………

………

………

………

………

………

III. (2 points)

Soit n un entier naturel quelconque. Déterminer $\text{PGCD}\left(n!\,;\,(n+1)!\right)$.

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

IV. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

On considère l'équation $62x+43y=1$ (E) d'inconnue $(x,\,y)\in\mathbb{Z}^2$.
Aucune justification n'est demandée dans cet exercice. On effectuera la recherche au brouillon.

1°) Donner un couple solution de (E).

Le couple (............ ; ....) est un couple solution de (E).

Vérifier que ce couple est bien une solution particulière de (E) (on écrira une ligne de calcul).

………..

2°) Recopier sur les lignes ci-dessous et compléter la phrase suivante : « Les couples solutions de (E) sont tous les couples de la forme (........... ; ....) ………… ».

………..

………..

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Un panneau mural a pour dimensions 240 cm et 360 cm. On souhaite le recouvrir avec des carreaux de forme carrée, tous de même taille en respectant les contraintes suivantes :
- le côté du carreau est un nombre entier de centimètres compris strictement entre 10 et 20 ;
- on ne devra réaliser aucun découpage des carreaux ;
- les carreaux seront disposés les uns contre les autres sans laisser d'espace entre eux.

1°) Déterminer le côté des carreaux. Indiquer toutes les solutions possibles.

……………………………………………

2°) On pose une rangée de carreaux bleus sur le pourtour et des carreaux blancs ailleurs.
Combien de carreaux blancs va-t-on utiliser ?

……………………………………………

VI. (1 point)

Soit n un entier naturel non nul. On note E_n l'ensemble des entiers naturels k tels que $1<k\leqslant 2n$.
Démontrer que si on prend $n+1$ entiers dans E_n il y en a toujours deux qui sont premiers entre eux.

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

Corrigé du contrôle du 9-1-2017

I.

Soit n un entier relatif quelconque. On pose $a=30n^2+21n+13$ et $b=15n^2+8n+6$.
On se propose de déterminer $\text{PGCD}(a\,;b)$ par deux méthodes indépendantes.
1ère méthode : Vérifier au brouillon que les égalités suivantes sont vraies :
$a=2b+5n+1 \quad (1)$; $b=3n\times(5n+1)+5n+6 \quad (2)$; $5n+6=1\times(5n+1)+5 \quad (3)$; $5n+1=n\times5+1 \quad (4)$.
Répondre en utilisant le lemme d'Euclide (et uniquement le lemme d'Euclide !) ainsi que les égalités précédentes.

En appliquant le lemme d'Euclide avec les égalités (1), (2), (3), (4) qui ne font intervenir que des entiers, on obtient :

$\text{PGCD}(a\,;b)=\text{PGCD}(b\,;5n+1)$
$\text{PGCD}(b\,;5n+1)=\text{PGCD}(5n+1\,;5n+6)$
$\text{PGCD}(5n+6\,;5n+1)=\text{PGCD}(5n+1\,;5)$
$\text{PGCD}(5n+1\,;5)=\text{PGCD}(5\,;1)$

Or $\text{PGCD}(5\,;1)=1$ donc par transitivité de la relation d'égalité, on obtient $\text{PGCD}(a\,;b)=1$.

On notera que l'on ne se préoccupe pas de savoir si les égalités (1), (2), (3), (4) sont des égalités de divisions euclidiennes.

2e méthode : Calculer au brouillon $(3n^2+n+1)a-(6n^2+3n+2)b$ (on écrira juste le résultat). Conclure.

On a $(3n^2+n+1)a-(6n^2+3n+2)b=1$.

Comme $3n^2+n+1$ et $6n^2+3n+2$ sont des entiers relatifs, on en déduit d'après le théorème de Bezout (sens facile), que a et b sont premiers entre eux soit $\text{PGCD}(a\,;b)=1$.

II.

Soit n un entier relatif quelconque.
1°) En observant que $(n+1)-n=1$, démontrer sans faire aucun calcul que n et $n+1$ sont premiers entre eux.
On répondra par une phrase.

L'égalité $(n+1)-n=1$ s'écrit aussi $1\times(n+1)+(-1)\times n=1$.
Comme 1 et – 1 sont des entiers relatifs, d'après le théorème de Bezout (sens facile), n et $n+1$ sont premiers entre eux.

2°) Démontrer de la même manière qu'au 1°) que n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

On remarque que $1\times(2n+1)-2n=1$.
Comme 1 et – 2 sont des entiers relatifs, d'après le théorème de Bezout (sens facile), n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

3°) Déduire des questions précédentes, à l'aide d'une propriété du cours, que n et $(n+1)(2n+1)$ sont premiers entre eux. Toute réponse mal justifiée ne sera pas prise en compte.

D'après les questions précédentes, on sait que n et $n+1$ sont premiers entre eux et que n et $2n+1$ sont premiers entre eux.
Or si un entier est premier avec deux entiers relatifs, alors il est premier avec le produit de ces deux entiers.
On en déduit que n est premier avec $(n+1)(2n+1)$.

III.

Soit n un entier naturel quelconque. Déterminer $\text{PGCD}(n!\,;(n+1)!)$.

On sait que $(n+1)!=n!\times(n+1)$.
Comme $n+1$ est un entier naturel, on peut affirmer que $n!$ divise $(n+1)!$.

Une propriété (évidente) permet d'affirmer que $\text{PGCD}(n!\,;(n+1)!)=n!$.

IV.

On considère l'équation $62x+43y=1$ (E) d'inconnue $(x,\,y)\in\mathbb{Z}^2$.
Aucune justification n'est demandée dans cet exercice. On effectuera la recherche au brouillon.

1°) Donner un couple solution de (E).

Le couple $(34\,;-49)$ est un couple solution de (E).

Vérifier que ce couple est bien une solution particulière de (E) (on écrira une ligne de calcul).

$62\times34+43\times(-49)=2108-2107=1$

2°) Recopier sur les lignes ci-dessous et compléter la phrase suivante : « Les couples solutions de (E) sont tous les couples de la forme (...........;...........) ………… ».

Les couples solutions de (E) sont tous les couples de la forme $(34-43k\,;62k-49)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

V.

Un panneau mural a pour dimensions 240 cm et 360 cm. On souhaite le recouvrir avec des carreaux de forme carrée, tous de même taille en respectant les contraintes suivantes :
- le côté du carreau est un nombre entier de centimètres compris strictement entre 10 et 20 ;
- on ne devra réaliser aucun découpage des carreaux ;
- les carreaux seront disposés les uns contre les autres sans laisser d'espace entre eux.

1°) Déterminer le côté des carreaux. Indiquer toutes les solutions possibles.

12 ou 15

On cherche $\text{PGCD}(240\,;360)=10\times\text{PGCD}(24\,;36)\text{PGCD}(240\,;360)=10\times12\times\text{PGCD}(2\,;3)=120$.

Le côté des carreaux est un diviseur positif de 120.
On cherche les diviseurs strictement positifs de 120 compris strictement entre 10 et 20. On trouve 12 et 15.

2°) On pose une rangée de carreaux bleus sur le pourtour et des carreaux blancs ailleurs.
Combien de carreaux blancs va-t-on utiliser ?

1^er^ cas : 504 2^e^ cas : 308

1^er^ cas : On prend des carreaux de 12 cm de côté.

$\dfrac{240}{12}=20$ et $\dfrac{360}{12}=30$

$20-2=18$ et $30-2=28$

$18\times28=504$

2^e^ cas : On prend des carreaux de 15 cm de côté.

$\dfrac{240}{15}=16$ et $\dfrac{360}{15}=24$

$16-2=14$ et $24-2=22$

$14\times22=308$

VI.

Soit n un entier naturel non nul. On note E_n l'ensemble des entiers naturels k tels que $1<k\leqslant 2n$.
Démontrer que si on prend $n+1$ entiers dans E_n il y en a toujours deux qui sont premiers entre eux.

$\text{E}_n=\{k\in\mathbb{N}\,/\,1<k\leqslant 2n\}$

Exemples :

On prend $n=2$.
$\text{E}_2=\{k\in\mathbb{N}\,/\,1<k\leqslant 4\}$ donc $\text{E}_2=\{2\,;3\,;4\}$.
On choisit 3 entiers dans E_2 c'est-à-dire ici 2, 3, 4.
Il y a bien deux entiers premiers entre eux : 2 et 3 par exemple.

On prend $n=3$.
$\text{E}_3=\{k\in\mathbb{N}\,/\,1<k\leqslant 6\}$ donc $\text{E}_3=\{2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$.
On choisit 4 entiers dans E_3. Il y a 5 choix possibles : 2-3-4-5, 2-3-4-6, 2-4-5-6 etc.
Dans chacun des cas, il y a bien deux entiers premiers entre eux.

Cas général :

Si on prend $n+1$ entiers dans E_n, il y en a forcément deux qui sont consécutifs (par l'absurde, sinon le plus grand serait supérieur à $2(n+1)=2n+2$ et ne pourrait donc être dans E_n).

Or deux entiers consécutifs sont premiers entre eux, d'où le résultat.