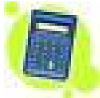
1$^{\text{ère}}$ **S1**

Contrôle du mardi 10 janvier 2017 (50 minutes)



Prénom et nom : ……………………………..…………

Note : ….. / 20

I. (4 points)

Dans chaque cas, donner l'expression de $f'(x)$. On effectuera les calculs au brouillon.
Chaque résultat sera donné sous forme simplifiée. Il est demandé de faire les barres de fractions à la règle.

1°) $f(x)=(3x-1)^4$ $\qquad$ $f'(x)=$……………………………………………

2°) $f(x)=\dfrac{3}{(2x-1)^5}$ $\qquad$ $f'(x)=$……………………………………………

3°) $f(x)=2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad$ $f'(x)=$……………………………………………

4°) $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{x-5}$ $\qquad$ $f'(x)=$……………………………………………

II. (8 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points)

On considère la fonction $f: x \mapsto \dfrac{x}{2}-3+\dfrac{2}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$ sans expliquer.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\qquad$ $f'(x)=$………………………………… (un seul résultat)

2°) Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $\sqrt{2}$.

Le coefficient directeur de T est égal à ………. (un seul résultat, sans égalité).

3°) Compéter sans explication la phrase :

$\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses ……………………………. .

4°) Déterminer les coordonnées du (ou des) point(s) de $\mathcal{C}$ en lequel (lesquels) la tangente a pour coefficient directeur $-\dfrac{3}{2}$.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

III. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point + 3 points)

À tout réel m on fait correspondre la fonction $f_m : x \mapsto \dfrac{mx-3}{x^2+4}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f_m'(x)$. Écrire le détail des calculs au verso. On se limitera à trois lignes.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $f_m'(x)=$……………………………………………

………

………

………

………

2°) Dans cette question, on prend $m = 2$.

Compléter sans explication la phrase :

$f_2\,'$ s'annule en …………………………………………… [écrire la (ou les) valeur(s) de x].

Étudier dans un même tableau le signe de $f_2\,'(x)$ et les variations de f_2.
On calculera au brouillon les extremums locaux et l'on complétera le tableau de variations avec ces extremums.
On tracera les traits, flèches de variations, barres de fraction à la règle.

Faire des phrases exprimant les variations de f_2.

………

………

………

………

IV. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) Calculer la somme $\mathrm{A} = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=4} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible. Écrire le calcul sur les lignes en dessous.

A = ………. (un seul résultat)

………

………

………

………

………

………

2°) Calculer la somme $\mathrm{B} = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=2017} (-1)^k$.

B = ………. (un seul résultat)

………

………

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 10-1-2017

I.

Dans chaque cas, donner l'expression de $f'(x)$. On effectuera les calculs au brouillon.
Chaque résultat sera donné sous forme simplifiée. Il est demandé de faire les barres de fractions à la règle.

1°) $f(x)=(3x-1)^4$ $\quad f'(x)=12(3x-1)^3$

2°) $f(x)=\dfrac{3}{(2x-1)^5}$ $\quad f'(x)=-\dfrac{30}{(2x-1)^6}$

3°) $f(x)=2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ $\quad f'(x)=\dfrac{3x-2}{x^3}$

4°) $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{x-5}$ $\quad f'(x)=\dfrac{4x^2-40x-1}{(x-5)^2}$

Calculs détaillés :

1°) $f(x)=(3x-1)^4$

$f'(x)=4\times3\times(3x-1)^3$ (formule $(u^n)'=nu'u^{n-1}$)

$=12(3x-1)^3$

2°) $f(x)=\dfrac{3}{(2x-1)^5}$

$f(x)=3\times\dfrac{1}{(2x-1)^5}$

$f'(x)=3\times\left[-\dfrac{5\times2}{(2x-1)^6}\right]$ (formule $(u^n)'=nu'u^{n-1}$)

$=-\dfrac{30}{(2x-1)^6}$

3°) $f(x)=2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}$

$f(x)=2-3\times\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ (réécriture pour faciliter la dérivation)

$f'(x)=0-3\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)-\dfrac{2}{x^3}$

$=\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}$

$=\dfrac{3\times x}{x^2\times x}-\dfrac{2}{x^3}$

$=\dfrac{3x}{x^3}-\dfrac{2}{x^3}$

$=\dfrac{3x-2}{x^3}$

4°) $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{x-5}$

$f'(x)=\dfrac{8x(x-5)-(4x^2+1)\times1}{(x-5)^2}$

$=\dfrac{8x^2-40x-4x^2-1}{(x-5)^2}$

$=\dfrac{4x^2-40x-1}{(x-5)^2}$

II.

On considère la fonction $f: x\mapsto \dfrac{x}{2}-3+\dfrac{2}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$ sans expliquer.

$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{x^2}$ (un seul résultat)

2°) Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $\sqrt{2}$.

Le coefficient directeur de T est égal à $-\dfrac{1}{2}$ (un seul résultat, sans égalité).

$$f'\left(\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}-1$$

$$=-\frac{1}{2}$$

3°) Compéter sans explication la phrase :

$\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses 2 et – 2.

On résout l'équation $f'(x)=0$.

4°) Déterminer les coordonnées du (ou des) point(s) de $\mathcal{C}$ en lequel (lesquels) la tangente a pour coefficient directeur $-\dfrac{3}{2}$.

On cherche $a\in\mathbb{R}^*$ tel que $f'(a)=-\dfrac{3}{2}$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{a^2}=-\frac{3}{2}$$

$$-\frac{2}{a^2}=-2$$

$$a^2=1$$

$a=1$ ou $a=-1$

Ces deux valeurs conviennent car elles sont toutes les deux différentes de 0.

$\mathcal{C}$ admet une tangente de coefficient directeur $-\dfrac{3}{2}$ aux points $E\left(1\,;-\dfrac{1}{2}\right)$ et $F\left(-1\,;-\dfrac{11}{2}\right)$.

III.

À tout réel m on fait correspondre la fonction $f_m : x\mapsto \dfrac{mx-3}{x^2+4}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f_m'(x)$. Écrire le détail des calculs au verso. On se limitera à trois lignes.

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad f_m'(x)=\frac{-mx^2+6x+4m}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad f_m'(x)=\frac{m\left(x^2+4\right)-2x(mx-3)}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$=\frac{mx^2+4m-2mx^2+6x}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$=\frac{-mx^2+6x+4m}{\left(x^2+4\right)^2}$$

2°) Dans cette question, on prend $m=2$.

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad f_2'(x)=\frac{-2x^2+6x+8}{\left(x^2+4\right)^2}$$

Compléter sans explication la phrase :

f_2' s'annule en – 1 et 4 [écrire la (ou les) valeur(s) de x].

On détermine les racines du polynôme $-2x^2+6x+8$.

Étudier dans un même tableau le signe de $f_2'(x)$ et les variations de f_2.
On calculera au brouillon les extremums locaux et l'on complétera le tableau de variations avec ces extremums.
On tracera les traits, flèches de variations, barres de fraction à la règle.

Il n'y a pas de valeurs interdites puisque la fonction f_2 est définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
Signe de $-2x^2+6x+8$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Signe de $\left(x^2+4\right)^2$		$+$		$+$		$+$	
Signe de $f_2'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f_2		$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	

Faire des phrases exprimant les variations de f_2.

f_2 est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$.

f_2 est strictement croissante sur l'intervalle $[-1\,;4]$.

f_2 est strictement décroissante sur l'intervalle $[4\,;+\infty[$.

IV.

1°) Calculer la somme $A=\sum_{k=1}^{k=4}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible. Écrire le calcul sur les lignes en dessous.

$A=\frac{7}{12}$ (un seul résultat)

$$A=\sum_{k=1}^{k=4}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$=\frac{(-1)^{1-1}}{1}+\frac{(-1)^{2-1}}{2}+\frac{(-1)^{3-1}}{3}+\frac{(-1)^{4-1}}{4}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{12}{12}-\frac{6}{12}+\frac{4}{12}-\frac{3}{12}$$

$$=\frac{7}{12}$$

2°) Calculer la somme $B=\sum_{k=0}^{k=2017}(-1)^k$.

$B=0$ (un seul résultat)

$$B=\sum_{k=0}^{k=2017}(-1)^k$$

$$=(-1)^0+(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^{2016}+(-1)^{2017}$$

$$=\underbrace{1-1}+\underbrace{1-1}+\ldots+\underbrace{1-1}$$

$$=0+0+\ldots+0$$

$$=0$$

La somme qui définit B comprend 2018 termes.