TS1

Contrôle du vendredi 6 janvier 2017 (50 minutes)

Prénom et nom : …………………………………………..……………

Note : ……../ 20

On prendra soin de ne rien écrire sur l'énoncé en dehors de ce qui est demandé.

I. (4 points)

On pose $z = 1 + \mathrm{i}$.

Déterminer le(s) réel(s) a tel(s) que $\left| z + a\bar{z} \right| = 2\sqrt{2}$.

Bonus (1 point) : Déterminer le(s) réel(s) a tel(s) que $\left| z^2 + a\bar{z}^2 \right| = 2\sqrt{2}$.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

II. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points)

Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z) = \left| (1+\mathrm{i})z \right| - 3\left| \bar{z} \right| + 2\left| -\mathrm{i}z \right|$.

1°) Exprimer $f(z)$ le plus simplement possible en fonction de $\left| z \right|$ sous la forme $f(z) = a\left| z \right|$ où a est un réel que l'on donnera.

………

………

………

………

………

2°) Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Déterminer l'ensemble E des points M de P, d'affixe z, tels que $f(z) = 1$.

………

………

………

………

………

………

………

III. (6 points : 3 points + 3 points)

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on note A et B les points d'affixes respectives $3\mathrm{i} - 1$ et $\mathrm{i} - 3$.

Déterminer en rédigeant avec soin :

- l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $\left| z + 1 - 3\mathrm{i} \right| = \left| 3 + z - \mathrm{i} \right|$;
- l'ensemble F des points M d'affixe z tels que $\left| \bar{z} + 3 + \mathrm{i} \right| = 4$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

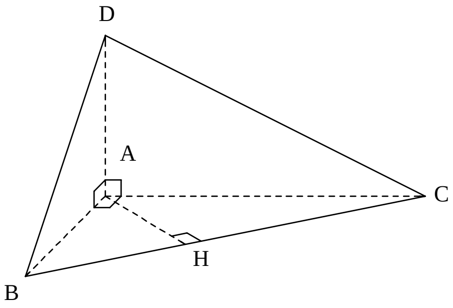
……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

IV. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points)

Soit ABCD un tétraèdre trirectangle en A c'est-à-dire tel que les triangles ABC, ACD et ABD soient rectangles en A. On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
On pourra utiliser librement que (AD) est orthogonale au plan (ABC).



1°) Démontrer que le plan (ADH) est orthogonal à la droite (BC).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) Soit P le plan passant par B et orthogonal à la droite (BC).

On note Δ la droite d'intersection des plans P et (BCD).

Tracer en vert Δ sur la figure en justifiant le tracé sur les lignes ci-dessous.
On attend une rédaction précise. Aucun tracé non justifié ou mal justifié ne sera pris en compte.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Conseils donnés à l'oral

I. On attend une résolution par équivalences (donc je ne veux aucun « donc » ni de « d'où »…).

IV. On peut utiliser les symboles de géométrie ($\perp$ et //).

Corrigé du contrôle du 6-1-2017

I.

On pose $z=1+\mathrm{i}$.
Déterminer le(s) réel(s) a tel(s) que $\left|z+a\bar{z}\right|=2\sqrt{2}$.
Bonus : Déterminer le(s) réel(s) a tel(s) que $\left|z^2+a\bar{z}^2\right|=2\sqrt{2}$.

Déterminer les réels a tels que $\left|z+a\bar{z}\right|=2\sqrt{2}$ $\quad(1)$.

Comme il n'y a pas de règle concernant le module d'une somme, on peut commencer par calculer $z+a\bar{z}$ puis $\left|z+a\bar{z}\right|$ à part.

$(1) \Leftrightarrow \left|1+\mathrm{i}+a(1-\mathrm{i})\right|=2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left|1+a+\mathrm{i}(1-a)\right|=2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1+a)^2+(1-a)^2}=2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2+2a^2}=2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2+2a^2=8$

$\Leftrightarrow a^2=3$

$\Leftrightarrow a=\sqrt{3}$ ou $a=-\sqrt{3}$

Bonus :

Déterminons les réels a tels que $\left|z^2+a\bar{z}^2\right|=2\sqrt{2}$ $\quad(2)$.

$(2) \Leftrightarrow \left|(1+\mathrm{i})^2+a(1-\mathrm{i})^2\right|=2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left|2\mathrm{i}+a(-2\mathrm{i})\right|=2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left|2\mathrm{i}(1-a)\right|=2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left|2\mathrm{i}\right|\times\left|1-a\right|=2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2\left|1-a\right|=2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left|1-a\right|=\sqrt{2}$ $\quad$ ($\left|1-a\right|$ désigne le module de $1-a$ mais comme $a\in\mathbb{R}$ c'est aussi sa valeur absolue)

$\Leftrightarrow 1-a=\sqrt{2}$ ou $1-a=-\sqrt{2}$ $\quad$ (on utilise les propriétés sur la valeur absolue)

$\Leftrightarrow a=1-\sqrt{2}$ ou $a=1+\sqrt{2}$

II.

Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z)=\left|(1+\mathrm{i})z\right|-3\left|\bar{z}\right|+2\left|-\mathrm{i}z\right|$.

1°) Exprimer $f(z)$ le plus simplement possible en fonction de $|z|$ sous la forme $f(z)=a|z|$ où a est un réel que l'on donnera.

$\forall z\in\mathbb{C} \quad f(z)=\left|(1+\mathrm{i})z\right|-3\left|\bar{z}\right|+2\left|-\mathrm{i}z\right|$

$=\left|1+\mathrm{i}\right|\times\left|z\right|-3\left|z\right|+2\left|-\mathrm{i}\right|\times\left|z\right|$

$=\sqrt{2}\left|z\right|-3\left|z\right|+2\left|z\right|$ $\quad$ (car $\left|1+\mathrm{i}\right|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ et $\left|-\mathrm{i}\right|=\left|0+(-1)\mathrm{i}\right|=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1$)

$=\left(\sqrt{2}-1\right)\left|z\right|$

On a bien $f(z)=a|z|$ avec $a=\sqrt{2}-1$.

2°) Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Déterminer l'ensemble E des points M de P, d'affixe z, tels que $f\left(z\right)=1$.

Soit M un point quelconque de P d'affixe $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in E &\Leftrightarrow f\left(z\right)=1 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}-1\right)\left| z \right|=1 \\ &\Leftrightarrow \left| z \right|=\frac{1}{\sqrt{2}-1} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{OM}=\frac{1\times\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\times\left(\sqrt{2}+1\right)} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{OM}=\frac{\sqrt{2}+1}{1} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{OM}=\sqrt{2}+1 \end{aligned}$$

Donc E est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}+1$.

III.

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on note A et B les points d'affixes respectives $3\mathrm{i}-1$ et $\mathrm{i}-3$.
Déterminer en rédigeant avec soin :
- l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $\left| z+1-3\mathrm{i} \right|=\left| 3+z-\mathrm{i} \right|$;
- l'ensemble F des points M d'affixe z tels que $\left| \bar{z}+3+\mathrm{i} \right|=4$.

Soit M un point quelconque de P d'affixe $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in E &\Leftrightarrow \left| z+1-3\mathrm{i} \right|=\left| 3+z-\mathrm{i} \right| \\ &\Leftrightarrow \left| z-\left(3\mathrm{i}-1\right) \right|=\left| z-\left(\mathrm{i}-3\right) \right| \\ &\Leftrightarrow \mathrm{AM}=\mathrm{BM} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{MA}=\mathrm{MB} \end{aligned}$$

Donc E est la médiatrice du segment $\left[\mathrm{AB}\right]$.

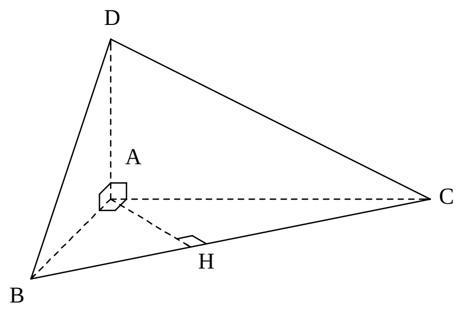
Soit M un point quelconque de P d'affixe $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in F &\Leftrightarrow \left| \bar{z}+3+\mathrm{i} \right|=4 \\ &\Leftrightarrow \left| \overline{\bar{z}+3+\mathrm{i}} \right|=4 \\ &\Leftrightarrow \left| z+3-\mathrm{i} \right|=4 \\ &\Leftrightarrow \left| z-\left(\mathrm{i}-3\right) \right|=4 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{BM}=4 \end{aligned}$$

Donc F est le cercle de centre B et de rayon 4.

IV.

Soit ABCD un tétraèdre trirectangle en A c'est-à-dire tel que les triangles ABC, ACD et ABD soient rectangles en A. On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
On pourra utiliser librement que $\left(\mathrm{AD}\right)$ est orthogonale au plan $\left(\mathrm{ABC}\right)$.



1°) Démontrer que le plan $\left(\mathrm{ADH}\right)$ est orthogonal à la droite $\left(\mathrm{BC}\right)$.

ABCD est un tétraèdre trirectangle en A donc $\left(\mathrm{AD}\right)\perp\left(\mathrm{ABC}\right)$.

Or si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

La droite $\left(\mathrm{BC}\right)$ est incluse dans le plan $\left(\mathrm{ABC}\right)$. Donc $\left(\mathrm{AD}\right)\perp\left(\mathrm{BC}\right)$.

Par ailleurs, $\left(\mathrm{AH}\right)\perp\left(\mathrm{BC}\right)$.

Or $\left(\mathrm{AD}\right)$ et $\left(\mathrm{AH}\right)$ sont deux droites sécantes du plan $\left(\mathrm{ADH}\right)$.

Donc $\left(\mathrm{BC}\right)\perp\left(\mathrm{ADH}\right)$ (utilisation du théorème : « Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan).

2°) Soit P le plan passant par B et orthogonal à la droite $\left(\mathrm{BC}\right)$.
On note Δ la droite d'intersection des plans P et $\left(\mathrm{BCD}\right)$.
Tracer en vert Δ sur la figure en justifiant le tracé sur les lignes ci-dessous.
On attend une rédaction précise. Aucun tracé non justifié ou mal justifié ne sera pris en compte.

Cette question a été la moins réussie de tout le contrôle.

On sait que $P \perp \left(\mathrm{BC}\right)$ par hypothèse.

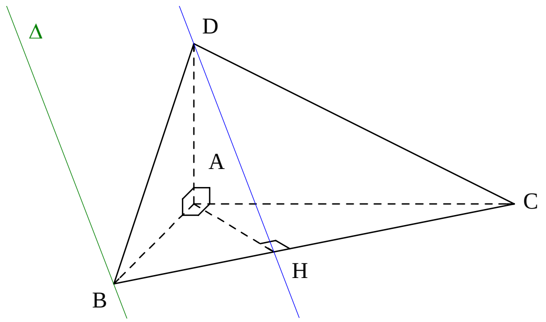
Or on a démontré dans la question 1°) que $\left(\mathrm{ADH}\right)\perp\left(\mathrm{BC}\right)$.

Or si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles entre eux.

D'où P // $\left(\mathrm{ADH}\right)$.

De plus, l'intersection des plans (ADH) et (BCD) est la droite (DH) et l'intersection des plans P et (BCD) est la droite Δ.
On en déduit grâce à un théorème du cours que $\Delta \,//\, (\mathrm{DH})$.

La droite Δ est donc la parallèle à (DH) passant par B (d'où le tracé sur la figure).



N. B. : On ne représente pas le plan P sur la figure (certains élèves l'ont fait).