TS1

Devoir pour le lundi 9 janvier 2017

On considère la fonction $f : x \mapsto 4x(1-x)$.

1°) Démontrer que pour tout réel θ on a $f\left(\sin^2\theta\right) = \sin^2(2\theta)$.

2°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme u_1 et la relation de récurrence $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
On suppose que $u_1 = \sin^2\theta$ où θ est un réel fixé.
Exprimer u_n en fonction de n et de θ.

3°) Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2 fixé.
Démontrer qu'il existe des réels $x_1, x_2, \ldots, x_p$ deux à deux distincts tels que $x_{i+1} = f(x_i)$ pour tout entier naturel i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant p-1$ et tels que $x_1 = f(x_p)$.

- Si $p = 2$, il faut démontrer qu'il existe deux réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_1$.

- Si $p = 3$, il faut démontrer qu'il existe trois réels x_1, x_2, x_3 tels que $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_3$ et $f(x_3) = x_1$.

- Pour p quelconque, il faut démontrer l'existence de p réels $x_1, x_2, \ldots, x_p$ deux à deux distincts tels que

l'image de x_1 par f soit égale à x_2 ;
l'image de x_2 par f soit égale à x_3 ;

l'image de x_p par f soit égale à x_1.

Corrigé du devoir pour le 9-1-2017

On considère la fonction $f : x \mapsto 4x(1-x)$.

1°) Démontrer que pour tout réel θ on a $f\left(\sin^2\theta\right)=\sin^2(2\theta)$.

$$\begin{aligned}\forall\theta\in\mathbb{R}\quad f\left(\sin^2\theta\right)&=4\sin^2\theta\times\left(1-\sin^2\theta\right)\\&=4\sin^2\theta\times\cos^2\theta\\&=\left(2\sin\theta\cos\theta\right)^2\\&=\left(\sin2\theta\right)^2\\&=\sin^2 2\theta\end{aligned}$$

2°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme u_1 et la relation de récurrence $u_{n+1}=4u_n(1-u_n)$ pour tout entier naturel $n\geqslant 1$.
On suppose que $u_1=\sin^2\theta$ où θ est un réel fixé.
Exprimer u_n en fonction de n et de θ.

On commence par essayer de conjecturer le résultat en effectuant le calcul des premiers termes.
On ne peut pas utiliser la calculatrice.

Nous savons que $u_2=f(u_1)$ par définition de la suite (u_n).
Or $u_1=\sin^2\theta$ par hypothèse donc $u_2=f\left(\sin^2\theta\right)$.

D'après la question 1°), on peut donc écrire $u_2=\sin^2 2\theta$.
De même $u_3=f(u_2)$ d'où $u_3=f\left(\sin^2 2\theta\right)$ et d'après la question 1°), $u_3=\sin^2 4\theta$.

$u_4=f(u_3)$
$u_4=f\left(\sin^2 4\theta\right)$
$u_4=\sin^2 8\theta$

On peut conjecturer que $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n=\sin^2\left(2^{n-1}\theta\right)$.
On peut démontrer ce résultat par récurrence.

3°) Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2 fixé.
Démontrer qu'il existe des réels x_1, x_2, . . . , x_p deux à deux distincts tels que $x_{i+1} = f\left(x_i\right)$ pour tout entier naturel i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant p-1$ et tels que $x_1 = f\left(x_p\right)$.

On reprend la suite $\left(u_n\right)$ définie à la question précédente.

Nous allons chercher une valeur de θ telle que $u_{p+1} = u_1 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \sin^2\left(2^p\theta\right) = \sin^2\theta$ (d'après la question précédente)

$\Leftrightarrow \sin\left(2^p\theta\right) = \sin\theta \quad (1')$ ou $\sin\left(2^p\theta\right) = -\sin\theta \quad (1")$

Pour que l'égalité (1) soit vérifiée, il suffit que l'égalité $(1')$ soit vérifiée.

$$\begin{aligned}
(1') &\Leftrightarrow 2^{p-1}\theta = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } 2^p\theta = \pi - \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
&\Leftrightarrow \left(2^{p-1} - 1\right)\theta = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } \left(2^p + 1\right)\theta = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
&\Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{2^{p-1} - 1} \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } \theta = \frac{\pi}{2^p + 1} + \frac{2k\pi}{2^p + 1} \quad (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

On pose $\theta = \dfrac{\pi}{2^p + 1}$.
On pose également $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$, …, $x_p = u_p$.

On a bien $x_{i+1} = f\left(x_i\right)$ pour tout entier naturel i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant p-1$ et $f\left(x_p\right) = x_1$.

On doit démontrer que x_1, x_2, . . . , x_p sont deux à deux distincts.

Comme $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2^p}$, $0 < \theta < 2\theta < 2^2\theta < ... < 2^{p-1}\theta < \dfrac{\pi}{2}$.

Comme la fonction sinus est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a :

$\sin 0 < \sin\theta < \sin 2\theta < \sin\left(2^2\theta\right) < ... < \sin\left(2^{p-1}\theta\right)\left(< \sin\dfrac{\pi}{2}\right)$ soit $0 < \sin\theta < \sin 2\theta < \sin\left(2^2\theta\right) < ... < \sin\left(2^{p-1}\theta\right)$.

On peut donc élever chaque membre au carré car tous les réels sont positifs ou nuls.
On obtient : $0 < \sin^2\theta < \sin^2 2\theta < \sin^2\left(2^2\theta\right) < ... < \sin^2\left(2^{p-1}\theta\right)$ ce qui donne $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_p$.