Loi d'équilibre génétique

Étant donné un gène possédant un couple d'allèles A et a, on dit qu'une plante est **homozygote** lorsqu'elle contient les deux mêmes allèles sur une paire de chromosomes homologues : elle est alors de génotype AA ou aa.
Une plante est **hétérozygote** lorsqu'elle est de génotype Aa. Certaines plantes, le lupin par exemple, se reproduisent par autogamie (ou autofécondation) : tout se passe pour la descendance comme si on fécondait deux plantes de même génotype, chaque chromosome d'une paire étant sélectionné au hasard.

I. Cas N°1 : L'objectif de cette partie est l'étude de la descendance par autogamie d'une plante hétérozygote.

Partie A : Générations successives

1°) **Première génération**
Une plante de génotype AA donne par autogamie une plante de génotype AA. De même, une plante de génotype aa donne une plante aa.
Déterminer à l'aide d'un échiquier de croisement les probabilités que la descendance de première génération d'une plante de génotype Aa soit une plante de génotype AA, Aa ou aa.
Les génotypes Aa et aA sont identiques.

2°) **Générations suivantes**
Partant d'une plante hétérozygote (Aa à la génération 0), on constitue par autogamie des générations successives. On utilise les notations suivantes :

- X_n est l'événement « la plante de la *n*-ième génération est de génotype AA »,
- Y_n est l'événement « la plante de la *n*-ième génération est de génotype Aa »,
- Z_n est l'événement « la plante de la *n*-ième génération est de génotype aa ».

Pour tout entier naturel *n*, on appelle x_n, y_n, z_n les probabilités respectives de $(\mathrm{AA})_n$, $(\mathrm{Aa})_n$, $(\mathrm{aa})_n$.

a) Quelles sont les valeurs de x_0, y_0, z_0 ? En déduire celles de x_1, y_1, z_1.

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, donner les valeurs des probabilités conditionnelles suivantes :

- X_{n+1} sachant X_n • X_{n+1} sachant Y_n • Y_{n+1} sachant Y_n.

c) Démontrer, en utilisant les résultats précédents, que pour tout entier naturel *n* :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{y_n}{4} \text{ et } y_{n+1} = \frac{y_n}{2}.$$

c) En déduire l'expression de z_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

Partie B : Évolution dans le temps

1°) **Conjectures**
a) Utiliser la calculatrice pour déterminer les valeurs de x_n, y_n et z_n pour chaque entier naturel *n* compris entre 0 et 10. On remplira un tableau en écrivant les troncatures à la sixième décimale.
b) Que peut-on conjecturer sur le comportement de ces trois suites ?

2°) **Étude des suites (x_n), (y_n) et (z_n)**

a) Quelle est la nature de la suite (y_n) ? Exprimer y_n en fonction de *n*, *n* étant un entier naturel quelconque.

b) En déduire l'expression de x_n puis de z_n en fonction de *n*.

Indication : Écrire l'égalité $x_{k+1} = x_k + \frac{y_k}{4}$ pour $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ jusqu'à $k = n-1$ puis additionner membre à membre les égalités obtenues.
On peut voir assez vite que pour raison de symétrie on a $x_n = z_n$.

c) Quelles sont les conséquences des résultats obtenus ?

II. Cas N°2 : L'objectif de cette partie est l'étude de la descendance d'une « population idéale ».

Une population de plantes (génération 0) est composée d'individus de génotypes AA, Aa, aa dans les proportions respectives p_0, q_0 et r_0. Un couple (parent 1, parent 2) de cette génération, constitué au hasard, donne naissance à un individu dont le génotype est constitué de deux allèles pris de façon équiprobable dans le génotype de chaque parent. Les génotypes Aa et aA sont identiques.

1°) Réaliser un arbre à trois niveaux
- premier niveau : Parent 1 tiré au hasard dans la population
- deuxième niveau : Parent 2. On admet que le tirage au hasard du Parent 2 se fait « avec remise » du Parent 1 dans une « population idéale » d'effectif infini.
- troisième niveau : Génération 1 qui prend au hasard un allèle de chaque parent.
Pondérer les branches de l'arbre.

2°) On note p_1, q_1 et r_1 les proportions respectives d'individus de génotypes AA, Aa, aa dans la génération 1.

a) Démontrer que $p_1 = \left(p_0 + \frac{q_0}{2}\right)^2$ et $r_1 = \left(r_0 + \frac{q_0}{2}\right)^2$.

b) Démontrer que $p_1 - r_1 = p_0 - r_0$. On pose alors $\alpha = p_0 - r_0$.

c) Démontrer que $p_1 = \frac{(1+\alpha)^2}{4}$, $r_1 = \frac{(1-\alpha)^2}{4}$, $q_1 = \frac{1-\alpha^2}{2}$.

3°) On note p_2, q_2 et r_2 les proportions respectives d'individus de génotypes AA, Aa, aa dans la génération 2, en appliquant les mêmes conditions.
Exprimer p_2, q_2 et r_2 en fonction de α.
Que peut-on conclure ?
C'est la loi de Hardy-Weinberg. En rechercher les conditions d'application concernant une « population idéale ».

Corrigé

I.

Partie A : Générations successives

1°)

$\sigma_{\text{mère}}$ \ $\sigma_{\text{père}}$	A	a
A	$\left(\dfrac{A}{\overline{\overline{A}}}\right)$ [A]	$\left(\dfrac{A}{\overline{\overline{a}}}\right)$ [A]
a	$\left(\dfrac{A}{\overline{\overline{a}}}\right)$ [A]	$\left(\dfrac{a}{\overline{\overline{a}}}\right)$ [a]

L'allèle dominant est écrit entre crochets.

La probabilité que la plante ait un génotype AA est $\frac{1}{4}$.

La probabilité que la plante ait un génotype Aa est $\frac{1}{2}$.

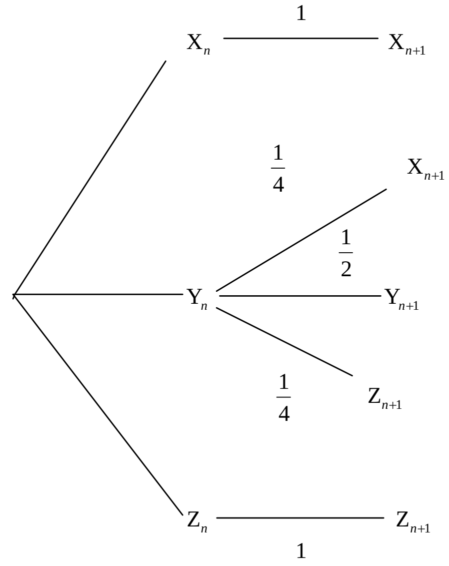
La probabilité que la plante ait un génotype aa est $\frac{1}{4}$.

2°)

a) $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $z_0 = 0$

$x_1 = \frac{1}{4}$, $y_1 = \frac{1}{2}$, $z_1 = \frac{1}{4}$.

b) • $P\left(X_{n+1}/X_n\right) = 1$ • $P\left(X_{n+1}/Y_n\right) = \frac{1}{4}$ • $P\left(Y_{n+1}/Y_n\right) = \frac{1}{2}$



c) $P\left(X_{n+1}/X_n\right) = 1$ et $P\left(X_{n+1}/Y_n\right) = \frac{1}{4}$

Donc $x_{n+1} = 1 \times x_n + \frac{1}{4} \times y_n$ soit $x_{n+1} = x_n + \frac{y_n}{4}$.

$P\left(Y_{n+1}/Y_n\right) = \frac{1}{2}$ d'où $y_{n+1} = \frac{y_n}{2}$.

c) $z_{n+1} = z_n + \frac{1}{4} y_n$ qui donne $z_{n+1} = x_n + \frac{1}{4} y_n$ car $x_n = z_n$

Partie B

1°) a)

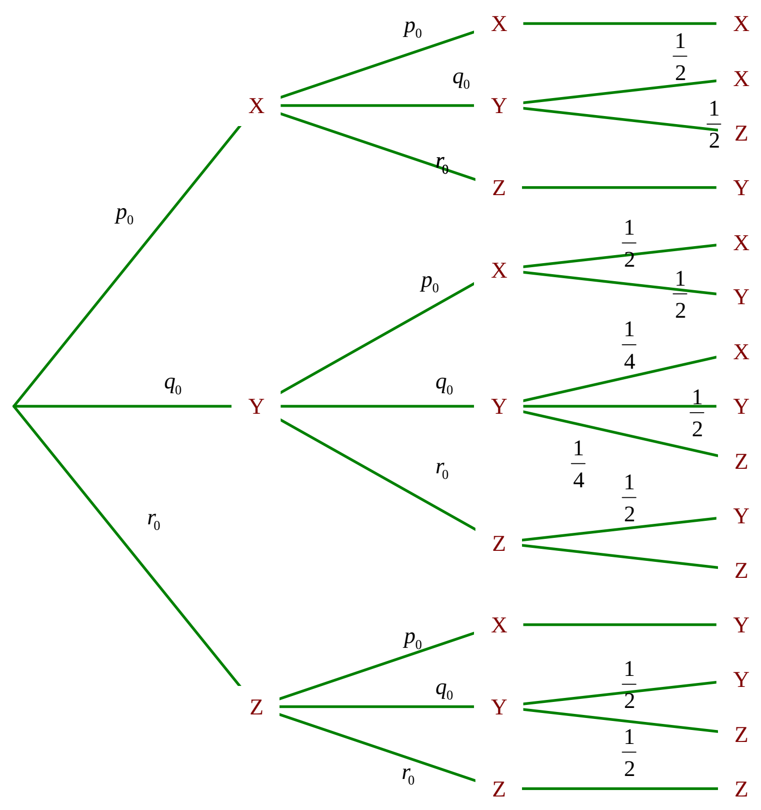
n	x_n	y_n	z_n
0	0	1	0
1	0,25	0,5	0,25
2	0,375	0,25	0,375
3	0,4375	0,125	0,4375
4	0,46875	0,0625	0,46875
5	0,484375	0,03125	0,484375
6	0,492188	0,015625	0,492188
7	0,496094	0,007813	0,496094
8	0,498047	0,003906	0,498047
9	0,499023	0,001953	0,499023
10	0,4999512	0,000976	0,4999512
11	0,499512	0,000488	0,499512

b) D'après la calculatrice, il semble que les suites $\left(x_n\right)$ et $\left(z_n\right)$ convergent vers $\dfrac{1}{2}$ et que la suite $\left(y_n\right)$ converge vers 0.

II. Cas N°2 : L'objectif de cette partie est l'étude de la descendance d'une « population idéale ».

1°)

On note les événements :
X : « La plante présente le génotype AA » ;
Y : « La plante présente le génotype Aa » ;
Z : « La plante présente le génotype aa ».



2°) a) Démontrer que $p_1=\left(p_0+\dfrac{q_0}{2}\right)^2$ et $r_1=\left(r_0+\dfrac{q_0}{2}\right)^2$.

On raisonne avec l'arbre en additionnant les probabilités.

$$\begin{aligned}p_1 &= p_0{}^2+p_0\times q_0\times\frac{1}{2}+p_0\times q_0\times\frac{1}{2}+q_0{}^2\times\frac{1}{4}\\ &= p_0{}^2+p_0q_0+\frac{q_0{}^2}{4}\\ &= \left(p_0+\frac{q_0}{2}\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_1 &= q_0{}^2\times\frac{1}{4}+q_0\times r_0\times\frac{1}{2}+r_0\times q_0\times\frac{1}{2}+r_0{}^2\\ &= \frac{q_0{}^2}{4}+q_0r_0+r_0{}^2\\ &= \left(r_0+\frac{q_0}{2}\right)^2\end{aligned}$$

b) Démontrer que $p_1 - r_1 = p_0 - r_0$. On pose alors $\alpha = p_0 - r_0$.

$$p_1 - r_1 = \left(p_0 + \frac{q_0}{2}\right)^2 - \left(r_0 + \frac{q_0}{2}\right)^2$$

$$= \left(p_0 + \frac{q_0}{2} + r_0 + \frac{q_0}{2}\right)\left(p_0 + \frac{q_0}{2} - r_0 - \frac{q_0}{2}\right)$$

$$= (p_0 + q_0 + r_0)(p_0 - r_0)$$

$$= 1 \times (p_0 - r_0) \quad \text{car} \quad p_0 + q_0 + r_0 = 1$$

$$= p_0 - r_0$$

c) Démontrer que $p_1 = \frac{1}{4}(1+\alpha)^2$, $r_1 = \frac{1}{4}(1-\alpha)^2$, $q_1 = \frac{1}{2}(1-\alpha^2)$.

$$p_1 = \left(p_0 + \frac{q_0}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{2p_0 + q_0}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{p_0 + q_0 + p_0}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{1 - r_0 + p_0}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2$$
$$= \frac{(1+\alpha)^2}{4}$$

$$r_1 = \left(r_0 + \frac{q_0}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{2r_0 + q_0}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{r_0 + q_0 + r_0}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{1 - p_0 + r_0}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$$
$$= \frac{(1-\alpha)^2}{4}$$

$$q_1 = 1 - p_1 - r_1$$
$$= 1 - \frac{(1+\alpha)^2}{4} - \frac{(1-\alpha)^2}{4}$$
$$= 1 - \frac{(1+\alpha)^2 + (1-\alpha)^2}{4}$$
$$= 1 - \frac{2 + 2\alpha^2}{4}$$
$$= 1 - \frac{1+\alpha^2}{2}$$
$$= \frac{1-\alpha^2}{2}$$

3°) On note p_2, q_2 et r_2 les proportions respectives d'individus de génotypes AA, Aa, aa dans la génération 2, en appliquant les mêmes conditions.
Exprimer p_2, q_2 et r_2 en fonction de α.

On sait que $\alpha = p_0 - r_0 = p_1 - r_1$.

$$p_2 = \frac{(1+\alpha)^2}{4}$$
$$r_2 = \frac{(1-\alpha)^2}{4}$$
$$q_2 = \frac{1-\alpha^2}{2}$$

Que peut-on conclure ?

C'est la loi de Hardy-Weinberg. En rechercher les conditions d'application concernant une « population idéale ».