TS1

Contrôle du vendredi 16 décembre 2016 (50 minutes)

Prénom et nom : ………………………………………..……………

Note : ……../ 20

I. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Un fabriquant d'appareils électroniques effectue un premier test à la sortie de la chaîne de fabrication. Si le test est positif (c'est-à-dire si l'appareil fonctionne correctement), l'appareil est acheminé chez le client. Sinon, l'appareil retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si ce deuxième test est positif, l'appareil est acheminé chez le client, sinon il est détruit. Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70 % des appareils neufs sortis directement de la chaîne de fabrication, mais que parmi les appareils réparés, seulement 65 % d'entre eux passent le second test avec succès.
On choisit un appareil au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication.
On note A l'événement : « Le premier test est positif » et B l'événement : « L'appareil est acheminé vers le client ».

1°) Calculer la probabilité que l'appareil soit acheminé vers le client.
Rédiger en donnant le calcul justificatif. On donnera la valeur exacte du résultat sous forme décimale.

………………..……………………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………………

2°) Le client reçoit un appareil. Calculer la probabilité que le premier test ait été positif.
Répondre directement sans détailler les calculs. On donnera la valeur arrondie au millième.

…………………… (un seul résultat, sans égalité)

3°) On choisit 300 appareils qui sortent directement de la chaîne de production.
Quelle est la probabilité que le nombre d'appareils pour lesquels le premier test est positif soit compris entre 150 et 200 (au sens large) ? On donnera la valeur arrondie au millième.

…………………….. (un seul résultat, sans égalité)

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Un institut de sondage réalise une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure.
La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est 0,4.

1°) L'institut contacte un échantillon de 350 personnes.
Déterminer à l'aide de la calculatrice l'intervalle de fluctuation « exact » au seuil de 95 % de la fréquence de personnes qui acceptent de répondre. On donnera les bornes sous forme fractionnaire.

……………………… (une seule réponse, sans égalité)

2°) L'institut souhaite contacter 3000 personnes.
Quel temps l'institut doit-il prévoir ?

……………………… (une seule réponse, sans égalité)

III. (3 points)

Lors d'un sondage dans une classe de 36 élèves, les élèves ont dû répondre par oui ou non à une question.
Les résultats sont donnés dans le tableau suivant. On précise que tous les élèves ont répondu à la question posée.

	Garçons	Filles
Oui	5	4
Non	15	12

On choisit un élève au hasard dans la classe.
On note A l'événement : « L'élève choisi est une fille » et B l'événement : « L'élève choisi a répondu oui ».
On modélise l'expérience aléatoire par une loi d'équiprobabilité P.
Les événements A et B sont-ils indépendants pour la loi P ? Justifier avec précision en présentant correctement les calculs.

………………..……………………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………………

IV. (3 points)

Soit (Ω, P) un univers probabilisé. On considère deux événements indépendants A et B.

On pose $P(A \cap B) = a$, $P(A \cap \overline{B}) = b$, $P(\overline{A} \cap B) = c$, $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = d$.

Entourer l'égalité qui est vraie :

$ab = cd$ $\quad\quad$ $ac = bd$ $\quad\quad$ $ad = bc$

Justifier alors le choix. Seule une réponse correctement justifiée sera prise en compte.

……

……

……

……

……

……

……

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Une urne contient six boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 6.
On tire au hasard deux boules successivement et sans remise. On note le numéro de chaque boule.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe l'écart entre les deux numéros c'est-à-dire la différence entre le plus grand et le plus petit des deux numéros.
X peut prendre les valeurs $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$.
On note P la loi d'équiprobabilité qui modélise l'expérience aléatoire.
On admettra sans démonstration que la loi de probabilité de X est donnée dans le tableau ci-dessous.

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

1°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
Écrire la formule utilisée avec les valeurs numériques en présentant les calculs en colonnes.
On donnera chaque résultat sous forme d'une fraction irréductible.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

2°) Calculer la probabilité que X soit un nombre impair sachant que X est supérieur ou égal à 2.
On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

……

……

……

……

……

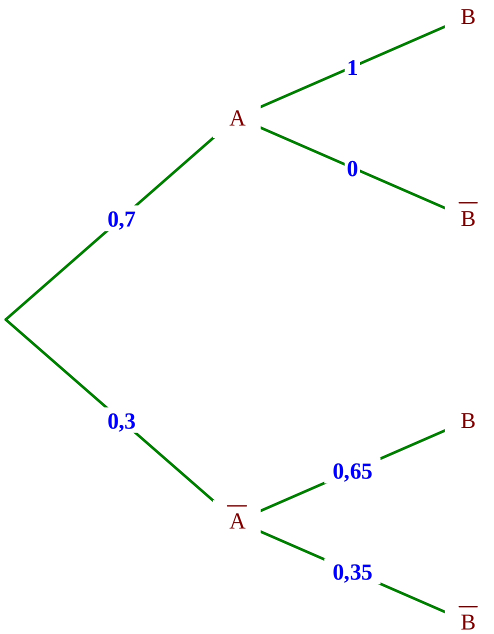
……

Corrigé du contrôle du 16-12-2016

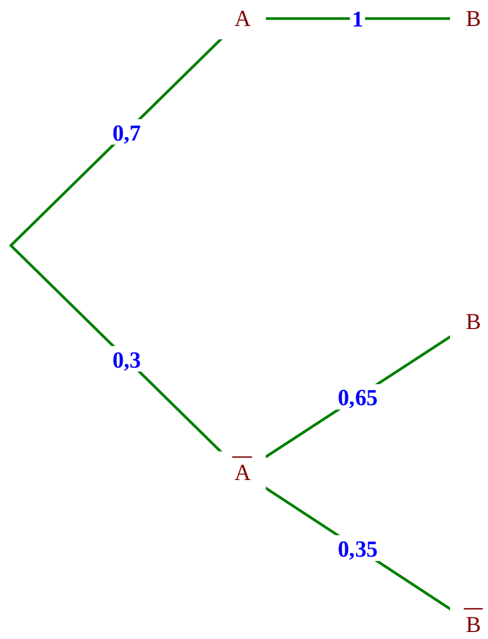
I.

Un fabriquant d'appareils électroniques effectue un premier test à la sortie de la chaîne de fabrication. Si le test est positif (c'est-à-dire si l'appareil fonctionne correctement), l'appareil est acheminé chez le client. Sinon, l'appareil retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si ce deuxième test est positif, l'appareil est acheminé chez le client, sinon il est détruit. Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70 % des appareils neufs sortis directement de la chaîne de fabrication, mais que parmi les appareils réparés, seulement 65 % d'entre eux passent le second test avec succès.
On choisit un appareil au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication.
On note A l'événement : « Le premier test est positif » et B l'événement : « L'appareil est acheminé vers le client ».

1°) Calculer la probabilité que l'appareil soit acheminé vers le client.
Rédiger en donnant le calcul justificatif. On donnera la valeur exacte du résultat sous forme décimale.



On peut aussi faire l'arbre sous la forme suivante :



On sait que A et $\overline{\text{A}}$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(\text{B}) = P(\text{A} \cap \text{B}) + P(\overline{\text{A}} \cap \text{B})$$

$$= P(\text{A}) \times P(\text{B}/\text{A}) + P(\overline{\text{A}}) \times P(\text{B}/\overline{\text{A}})$$

$$= 0,7 \times 1 + 0,3 \times 0,65$$

$$= 0,895$$

2°) Le client reçoit un appareil. Calculer la probabilité que le premier test ait été positif.
Répondre directement sans détailler les calculs. On donnera la valeur arrondie au millième.

0,782 (un seul résultat, sans égalité)

$$P(\text{A}/\text{B}) = \frac{P(\text{A} \cap \text{B})}{P(\text{B})}$$

$$= \frac{0,7}{0,895}$$

$$= 0,78212290...$$

3°) On choisit 300 appareils qui sortent directement de la chaîne de production.
Quelle est la probabilité que le nombre d'appareils pour lesquels le premier test est positif soit compris entre 150 et 200 (au sens large) ? On donnera la valeur arrondie au millième.

0,116 (un seul résultat, sans égalité)

On note E l'événement : « Le nombre d'appareils pour lesquels le premier test est positif est compris entre 150 et 200 (au sens large) ».

Soit X le nombre d'appareils pour lesquels le premier test est positif.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 300$ et $p = 0,7$.

$$\begin{aligned} P(\mathrm{E}) &= P(150 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 200) \\ &= P(\mathrm{X} \leqslant 200) - P(\mathrm{X} \leqslant 149) \end{aligned}$$

Sur la calculatrice, on fait « binomFRép(300,0.7,200) – binomFRép(300,0.7,149) ».

On obtient : $P(\mathrm{E}) = 0{,}1163165539\ldots$.

II.

Un institut de sondage réalise une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure.
La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est 0,4.

1°) L'institut contacte un échantillon de 350 personnes.
Déterminer à l'aide de la calculatrice l'intervalle de fluctuation « exact » au seuil de 95 % de la fréquence de personnes qui acceptent de répondre. On donnera les bornes sous forme fractionnaire.

$\left[\dfrac{122}{350} ; \dfrac{158}{350}\right]$ (une seule réponse, sans égalité)

On note X le nombre de personnes qui acceptent de répondre.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 350$ et $p = 0,4$.

On cherche :

- le plus petit entier naturel a tel que $P(\mathrm{X} \leqslant a) > 0,025$;
- le plus petit entier naturel b tel que $P(\mathrm{X} \leqslant b) \geqslant 0,975$.

Autre manière de rédiger :

On note F la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 350$ et $p = 0,4$.

On cherche :

- le plus petit entier naturel a tel que $\mathrm{F}(a) > 0,025$;
- le plus petit entier naturel b tel que $\mathrm{F}(b) \geqslant 0,975$.

Sur la calculatrice, on rentre la fonction : $\mathrm{Y1} = \mathrm{binomFRép}(350, 0.4, \mathrm{X})$.
On définit un pas de table de 1 et $\mathrm{Xmin} = 0$.
On trouve $a = 122$ et $b = 158$.

Donc l'intervalle de fluctuation « exact » au seuil de 95 % de la fréquence de personnes qui acceptent de répondre est $\left[\dfrac{122}{350} ; \dfrac{158}{350}\right]$.

Il est inutile de simplifier les bornes.

On constate que cet intervalle contient bien la probabilité $p = \dfrac{4}{10} = \dfrac{140}{350}$ et est centré en p.

Son amplitude est de $\dfrac{36}{350}$.

Avec la calculatrice, on vérifie que On vérifie par le calcul que $P(122 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 158)$ est voisine de 0,95, en étant légèrement supérieure.

On a : $P(122 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 158) = P(\mathrm{T} \leqslant 158) - P(\mathrm{T} \leqslant 121)$.

Avec la calculatrice, on obtient : $P(122 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 158) = 0,956628880....$

Pour résoudre la question, on peut aussi utiliser la commande invBinom((faire $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{var}}$ (distrib).

2°) L'institut souhaite contacter 3000 personnes.
Quel temps l'institut doit-il prévoir ?

150 heures (une seule réponse, sans égalité)

L'institut traite 10 communications par demi-heure soit 20 communications par heure.

$$\frac{3000}{20} = 150$$

III.

Lors d'un sondage dans une classe de 36 élèves, les élèves ont dû répondre par oui ou non à une question.
Les résultats sont donnés dans le tableau suivant. On précise que tous les élèves ont répondu à la question posée.

	Garçons	Filles
Oui	5	4
Non	15	12

On choisit un élève au hasard dans la classe.
On note A l'événement : « L'élève choisi est une fille » et B l'événement : « L'élève choisi a répondu oui ».
On modélise l'expérience aléatoire par une loi d'équiprobabilité *P*.
Les événements A et B sont-ils indépendants pour la loi *P* ? Justifier avec précision en présentant correctement les calculs.

On démarre sèchement les calculs. Il n'y a pas besoin de faire d'arbre de probabilités dans cet exercice.

D'une part, $P\left(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\right)=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$.

D'autre part, $P\left(\mathrm{A}\right)\times P\left(\mathrm{B}\right)=\dfrac{16}{36}\times\dfrac{9}{36}=\dfrac{4}{9}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{9}$.

On constate que $P\left(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\right)=P\left(\mathrm{A}\right)\times P\left(\mathrm{B}\right)$.

On en déduit que A et B sont indépendants pour *P*.

IV.

Soit $\left(\Omega, P\right)$ un univers probabilisé. On considère deux événements indépendants A et B.
On pose $P\left(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\right)=a$, $P\left(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}}\right)=b$, $P\left(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}\right)=c$, $P\left(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}\right)=d$.
Entourer l'égalité qui est vraie :

$ab=cd$ $\qquad$ $ac=bd$ $\qquad$ $ad=bc$

Justifier alors le choix. Seule une réponse correctement justifiée sera prise en compte.

L'égalité correcte est la troisième : $ad=bc$.

En effet, A et B sont indépendants par hypothèse donc d'après une propriété du cours :
$\overline{\mathrm{A}}$ et $\overline{\mathrm{B}}$ sont indépendants,
$\overline{\mathrm{A}}$ et B sont indépendants,
A et $\overline{\mathrm{B}}$ sont indépendants.

Par conséquent, $a=P\left(\mathrm{A}\right)\times P\left(\mathrm{B}\right)$, $b=P\left(\mathrm{A}\right)\times P\left(\overline{\mathrm{B}}\right)$, $c=P\left(\overline{\mathrm{A}}\right)\times P\left(\mathrm{B}\right)$, $d=P\left(\overline{\mathrm{A}}\right)\times P\left(\overline{\mathrm{B}}\right)$.

On a donc $ad=P\left(\mathrm{A}\right)\times P\left(\mathrm{B}\right)\times P\left(\overline{\mathrm{A}}\right)\times P\left(\overline{\mathrm{B}}\right)$ et $bc=P\left(\mathrm{A}\right)\times P\left(\overline{\mathrm{B}}\right)\times P\left(\overline{\mathrm{A}}\right)\times P\left(\mathrm{B}\right)$. On en déduit que $ad=bc$.

V.

Une urne contient six boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 6.
On tire au hasard deux boules successivement et sans remise. On note le numéro de chaque boule.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe l'écart entre les deux numéros c'est-à-dire la différence entre le plus grand et le plus petit des deux numéros.
X peut prendre les valeurs $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$, $x_5=5$.
On note *P* la loi d'équiprobabilité qui modélise l'expérience aléatoire.
On admettra sans démonstration que la loi de probabilité de X est donnée dans le tableau ci-dessous.

x_i	1	2	3	4	5
$P\left(\mathrm{X}=x_i\right)$	$\dfrac{5}{15}$	$\dfrac{4}{15}$	$\dfrac{3}{15}$	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{1}{15}$

1°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
Écrire la formule utilisée avec les valeurs numériques en présentant les calculs en colonnes.
On donnera chaque résultat sous forme d'une fraction irréductible.

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{X}\right)=1\times\frac{5}{15}+2\times\frac{4}{15}+3\times\frac{3}{15}+4\times\frac{2}{15}+5\times\frac{1}{15}$$

$$=\frac{5+8+9+8+5}{15}$$

$$=\frac{35}{15}$$

$$=\frac{7}{3}$$

$$\mathrm{V}\left(\mathrm{X}\right)=1^2\times\frac{5}{15}+2^2\times\frac{4}{15}+3^2\times\frac{3}{15}+4^2\times\frac{2}{15}+5^2\times\frac{1}{15}-\left(\frac{7}{3}\right)^2 \quad \text{(formule de Koenig-Huygens)}$$

$$=\frac{105}{15}-\frac{49}{9}$$

$$=7-\frac{49}{9}$$

$$=\frac{63-49}{9}$$

$$=\frac{14}{9}$$

2°) Calculer la probabilité que X soit un nombre impair sachant que X est supérieur ou égal à 2.
On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

Notons A l'événement « X est un nombre impair » et B l'événement « X est supérieur ou égal à 2 ».

Les résultats qui correspondent à l'événement $A \cap B$ sont 3 et 5.

$$P(A \cap B) = P(X = 3) + P(X = 5) = \frac{3}{15} + \frac{1}{15} = \frac{4}{15}$$

$$P(B) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{4}{15} + \frac{3}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = \frac{10}{15}$$

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{4}{15}}{\frac{10}{15}}$$

$$= \frac{4}{10}$$

$$= \frac{2}{5}$$

La probabilité que la probabilité que X soit un nombre impair sachant que X est supérieur ou égal à 2 est égale à $\frac{2}{5}$.