Résolution des équations diophantiennes linéaires à deux inconnues

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $6x+7y=57$ (E).

1°) Déterminer une solution particulière de (E).

[$y=\dfrac{57-6x}{7}$ / $f(x)=\dfrac{57-6x}{7}$ / calculatrice]

$(6\,;3)$ est une solution particulière de (E)

La calculatrice permet d'obtenir rapidement un tableau de valeurs de la fonction *f* pour des valeurs entières de *x* et évite ainsi des calculs qui seraient fastidieux à faire à la main.

2°) Résoudre (E).

1ère partie :

On utilise la solution particulière de (E) trouvée au 1°).

$$\begin{aligned}(\text{E}) &\Leftrightarrow 6x+7y=6\times 6+7\times 3\\ &\Leftrightarrow 6(x-6)=7(3-y) \quad (\text{E}')\end{aligned}$$

D'après (E'), $7 \mid 6(x-6)$.
Or 7 et 6 sont premiers entre eux
Donc d'après le théorème Gauss, $7 \mid x-6$.
Par conséquent, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x-6=7k$ ce qui donne $x=6+7k$.
On remplace ensuite $x-6$ par $7k$ dans (E') ce qui donne alors $6\times 7k=7(3-y)$ d'où $y=3-6k$.

2e partie :

$$\forall k\in\mathbb{Z} \quad 6(6+7k)+7(3-6k)=57$$

Conclusion :

Les solutions de l'équation (E) sont tous les couples de la forme $(6+7k\,;3-6k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.